

Муслов С. А.

**К ЗАДАЧЕ О СТАРТЕ ТРЕЩИНЫ В КУРСЕ МЕХАНИКИ И БИОМЕХАНИКИ**

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2008/1/59.html](http://www.gramota.net/materials/1/2008/1/59.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2008. № 1 (8). С. 139-143. ISSN 1993-5552.

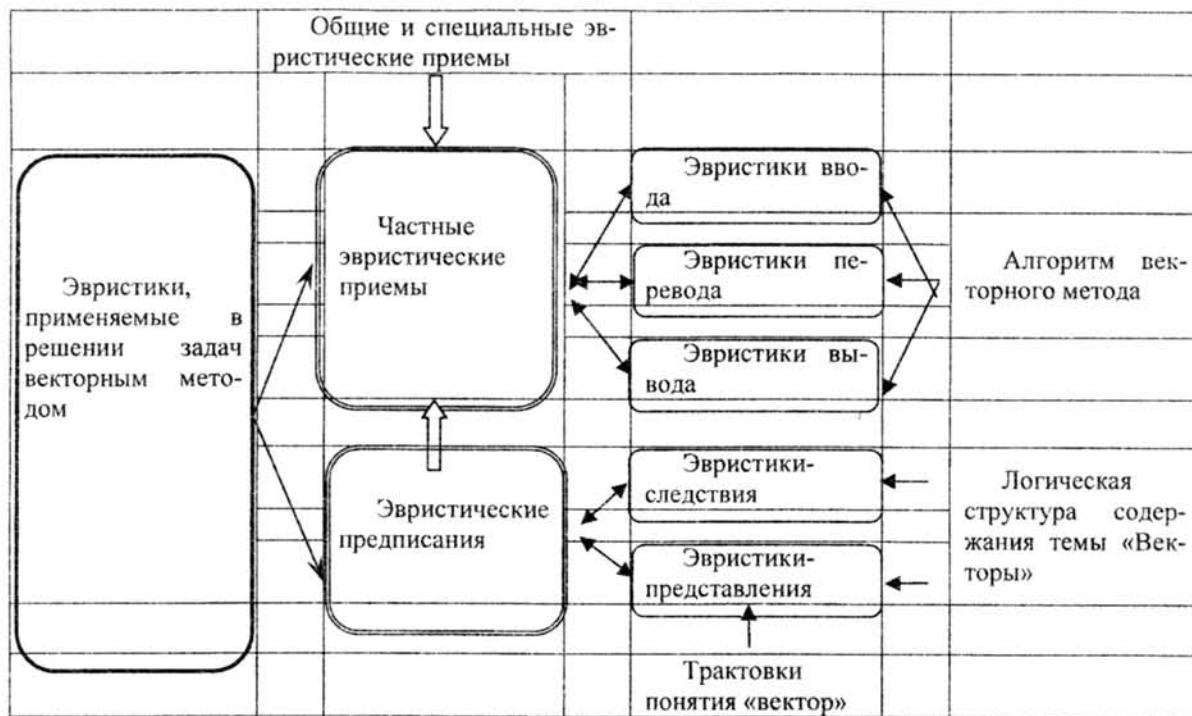
Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2008/1/](http://www.gramota.net/materials/1/2008/1/)

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)



**Рис. 1.** Система эвристик, используемых в решении задач векторным методом

*Список использованной литературы*

1. Александров А. Д., Неизвестен Н. Ю. Геометрия: Учеб. пособие. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. - 672 с.
2. Александрова Н. В. Из истории векторного исчисления. - М.: Изд-во МАИ, 1992. - 152 с.
3. Аргунов Б. И. О некоторых путях реализации воспитательных функций школьного курса математики // Преподавание геометрии в 9-10 классах. Сб. статей / Сост. З. А. Скопец, Р. А. Хабиб. - М.: Просвещение, 1980. - 270 с.
4. Болтянский В. Г. Элементарная геометрия: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1985. - 320 с.
5. Болтянский В. Г., Яглом И. М. Преобразования. Векторы: Пособие для учителя. - М.: Просвещение, 1964. - 303 с.
6. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Степановой, Н. С. Подходовой. - М.: Дрофа, 2005. - 416 с.
7. Мугаллимова С. Р. Формирование системы эвристик, используемых в решении задач (на примере векторного метода) // Электронный научный журнал «Вестник Омского педагогического университета». - Выпуск 2007. - Режим доступа к журн.: <http://www.omsk.edu>
8. Рыжик В. И. 2500 уроков математики: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1993. - 240 с.
9. Саранцев Г. И. Методика преподавания геометрии в девятилетней школе: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов педагогических институтов. - Саранск: Мордовский педагогический институт, 1992. - 130 с.
10. Фридман Л. М. Теоретические основы обучения математике: Учебное пособие. - Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Едиториал УРСС, 2005. - 248 с.

**К ЗАДАЧЕ О СТАРТЕ ТРЕЩИНЫ В КУРСЕ МЕХАНИКИ И БИОМЕХАНИКИ**

*Муслов С. А.  
ГОУ ВПО «МГМСУ»*

Рассмотрена схема потери устойчивости трещиной под действием внешних растягивающих напряжений, справедливая в случае идеально хрупкого твёрдого тела или близкому к нему (например, в случае стекла, керамики, костной ткани и зубной эмали). В других телах (например, металлах и их сплавах) развитие трещины сопровождается значительным пластическим деформированием в зоне трещины, которое нельзя игнорировать. Кроме того, в 3-х мерном случае критерий Гриффита содержит, помимо прочего, коэффициент Пуассона.

Актуальность вопроса о распространении трещин в теории прочности материалов и в курсе механики и биомеханики послужила основанием для данного сообщения. Этот вопрос, в частности, позволяет понять механизм хрупкого разрушения и наметить меры его предотвращения. Алан Арнольд Гриффит (в отечественной литературе встречается также написание Гриффитс) первым поставил и решил задачу о механике разрушения хрупких материалов [Griffith A.A. 1925: 1, Гриффитс А.А. 1995: 5]. Венгерский физик-механик Эгон Орован, профессор Массачусетского технологического института [Orowan E. 1955: 3], и М.А. Штремель, профессор Московского института стали и сплавов [Штремель 1997: 6], отмечали что критерий Гриффита - энергетический критерий распространения трещины в хрупком материале, в соответствии с которым

трещина будет расти лишь в том случае, если освобождаемая при этом энергия достаточна для обеспечения всех затрат энергии, связанных с этим ростом. Таким образом, базовым положением классической теории Гриффита является утверждение, что распространение трещины происходит в том и только том случае, если при этом понижается полная энергия системы.

Рассмотрим изотропное твёрдое тело, а именно пластину единичной толщины, к которой извне приложено постоянное статическое растягивающее напряжение  $\sigma$ . Согласно закону Гука упругая деформация тела приводит к плоскому напряжённому состоянию и накоплению в нём упругой потенциальной энергии с плотностью, равной

$$u = \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (1)$$

где  $E$  - модуль Юнга материала. Если в теле сделать надрез длиной  $l$  (Рис. 1), то вокруг неё появится зона разгрузки площадью примерно  $\frac{\pi l^2}{4}$ . При разгрузке трещина высвобождает упругую энергию

$$W_{ymp} = u \frac{\pi l^2}{4} = \frac{\pi l^2 \sigma^2}{8E} \square l^2, \quad (2)$$

т.е. уменьшение запасённой в теле упругой энергии пропорционально квадрату размера трещины (Рис. 1, 1). Это "первая чаша энергетических весов". Вместе с тем, раскрытие трещины сопровождается увеличением поверхностной энергии вследствие образования стенок трещины с удельной энергией поверхности  $\gamma$ . Затраты пропорциональны удвоенной длине трещины

$$W_{nos} = 2\gamma l \square l \quad (3)$$

(Рис. 1, 2) - это "вторая чаша энергетических весов".

Таким образом, зависимость полной энергии системы от размера трещины имеет вид

$$W = W_{nos} - W_{ymp} = 2\gamma l - \frac{\pi l^2 \sigma^2}{8E} \quad (4)$$

и проходит через максимум (Рис. 1, 3).

Поскольку высвобождаемая энергия растёт с длиной трещины квадратично, а затрачиваемая линейно, самопроизвольное распространение под постоянной нагрузкой достаточно малых трещин невозможно (затраты энергии больше выигрыша), а при больших размерах - неизбежно.

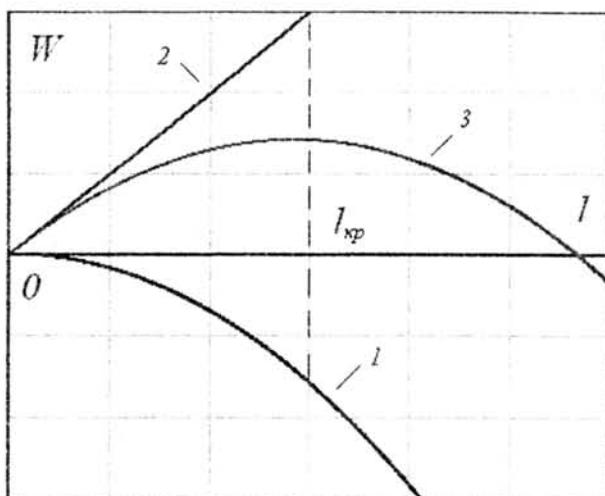


Рис. 1. Зависимость упругой  $W_{ymp}$  (1), поверхностной  $W_{nos}$  (2) и полной  $W$  (3) энергии от длины трещины  $l$

С точки зрения энергетического баланса, в критическом состоянии прирост затрат и высвобождаемой энергии равны (Рис. 2):

$$\frac{dW_{nos}}{dl} = -\frac{dW_{ymp}}{dl}. \quad (5)$$

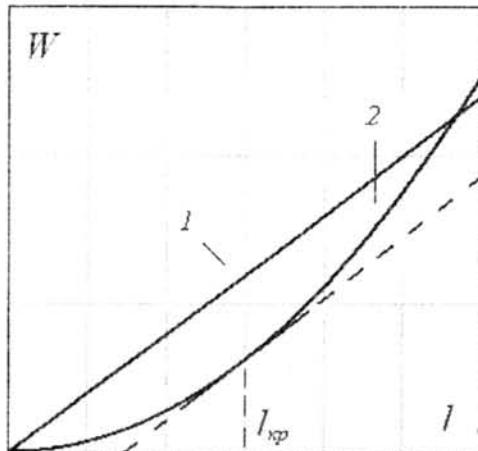


Рис. 2. Зависимость поверхностной  $W_{\text{surf}}$  (1) и упругой  $W_{\text{el}}$  (взятой с обратным знаком, 2) энергии от длины трещины  $l$ .

В этом случае, общая энергия системы не изменяется при любом малом приращении её длины. Подстановка  $W_{\text{el}}$  и  $W_{\text{surf}}$  даёт важные соотношения (к аналогичным результатам приводит прямое дифференцирование  $W$  по длине трещины  $l$  или исследование квадратного двучлена  $W(l)$ ).

Итак, во-первых, при постоянном напряжении существует критический размер трещины:

$$2\gamma_s = \frac{\pi l_{\text{cp}} \sigma^2}{4E},$$

откуда

$$l_{\text{cp}} = \frac{8\gamma_s E}{\sigma^2}. \quad (6)$$

Трещины длиннее  $l_{\text{cp}}$  ("зародыши разрушения") неустойчивы и самопроизвольно увеличивают свои размеры, что приводит к образованию макроскопической трещины и, в конце концов, нарушению сплошности и разрушению материала. Трещины с размером, меньшим критического  $l_{\text{cp}}$ , стремятся уменьшиться (залечиваются), в результате их распространение тормозится.

Во-вторых, для трещины любого данного размера  $l$  существует критическое разрушающее напряжение

$$\sigma_{\text{cp}} = \sqrt{\frac{8\gamma_s E}{\pi l}} \square \sqrt{\frac{1}{l}}, \quad (7)$$

при котором начинается её неограниченный рост. Последнее соотношение впервые получено Гриффитом и названо его именем. Согласно этому соотношению, реальная (не теоретическая, которая на 2-3 порядка выше) прочность твёрдого хрупкого тела, имеющего трещину размером  $l$ , обратно пропорциональна корню квадратному из длины дефекта. Из полученного выражения следует, что при развитии трещины по мере увеличения её длины необходимое для этого напряжение должно снижаться. Значит, рассматриваемый процесс развития хрупкой трещины должен самоускоряться.

*Выходы.* Мелкая трещина для своего роста должна больше потреблять поверхностной энергии, чем производить упругой энергии вследствие релаксации напряжений. Эти условия невыгодны для роста трещины. Однако, если исходная трещина достаточно велика, картина изменяется на противоположную: с ростом размеров величина освобожденной энергии увеличивается быстрее - она ведь зависит от квадрата длины трещины. Если длина трещины превышает некоторую "критическую длину Гриффита", трещина производит больше энергии, чем потребляет. Тогда она может с громадной скоростью рвануться вперед, и процесс этот будет подобен взрыву.

Кроме того, представляет также интерес выражение для полной энергии трещины в критическом состоянии и её зависимость от величины приложенной нагрузки  $W_{\text{el}}(\sigma)$ . Нетрудно получить, что

$$W_{\text{el}}(\sigma) = \gamma_s l_{\text{cp}} = \frac{8\gamma_s^2 E}{\pi \sigma^2} \square \frac{1}{\sigma^2}. \quad (8)$$

Из формулы видно, что величина критической энергии, также как и критическая длина трещины, обратно пропорциональна квадрату величины растягивающего напряжения  $\sigma$  (Рис. 3), а зависимость энергии трещины от её длины для двух величин растягивающего напряжения будет выглядеть как на Рис. 4.

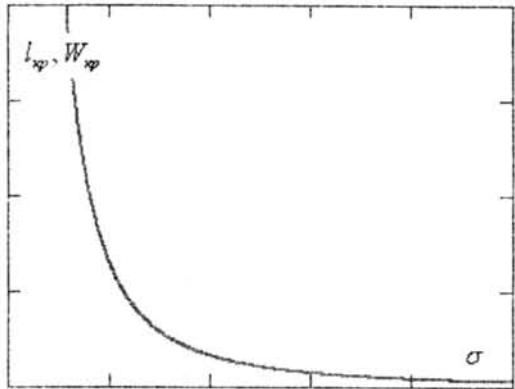


Рис. 3. Зависимость критической длины трещины  $l_{cp}(\sigma)$  и критической энергии  $W_{cp}(\sigma)$  трещины от величины внешней статической нагрузки  $\sigma$

Если рассмотренная нами пластина имеет достаточно большую толщину, у вершины трещины возникает уже не плоское, а объёмное напряжённое состояние. Для этого случая критерий Гриффита записывается в форме, содержащей, помимо прочего, коэффициент Пуассона  $\nu$  [4]:

$$\sigma_{cp} = \sqrt{\frac{8\gamma_s E}{\pi(1-\nu^2)}} \quad (9)$$

В металлах формула (6) занижала критический размер трещины на 1-2 порядка. Поэтому в металлических материалах, в которых невозможно идеально хрупкое разрушение, критерий Гриффита потребовал изменений.

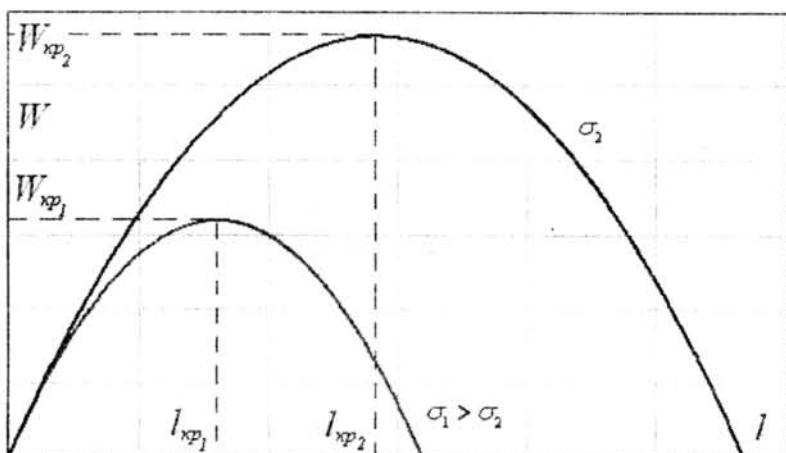


Рис. 4. Зависимость энергии трещины  $W$  от её длины для двух значений растягивающего напряжения  $\sigma$

Простейшим из них является замена  $\gamma_s$  на  $\gamma = \gamma_s + \gamma_m$ , где  $\gamma$  - не только удельная работа по образованию новой поверхности, как первоначально интерпретировалось Гриффитом, но и работа местной пластической деформации на единицу площади поверхности трещины  $\gamma_m$  (критерий Ирвина-Гриффита [Irwin G.R. et al. 1954: 2]), при этом, в металлических материалах  $\gamma_m \approx 10^3 \gamma_s$ ! В результате критическая длина трещин в металлах имеет величину порядка миллиметров, в то время как в истинно хрупких материалах, например, в стекле - микрометры, что хорошо согласуется с опытными данными.

Также как и физические субстанции, биологические, например, костные ткани подчиняются рассмотренным закономерностям. Зубная эмаль реагирует на смену температур, расширяясь и сужаясь. Быстрые изменения температуры могут привести к формированию микроскопических расколов эмали - поверхностных трещин, которые при критических значениях напряжений (7) могут привести к образованию поверхностных и магистральных макротрещин, в результате к нарушению сплошности и разрушению защитного слоя эмали.

#### Список использованной литературы

1. Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc., London, A. - 1920. - Vol. 221. - Pp. 163-198.
2. Irwin G. R., Kies J. A. Critical Energy Rate Analysis of Fracture Strength // Welding Journal, Research Supplement, 1954.
3. Orowan E. Energy criteria of fracture // Welding Journal, Research Supplement, 1955.

4. Sack R. A. Extension of Griffith's Theory of Rupture to Three Dimensions // Proc. Phys. Soc. - 1946. - Vol. 58. - Pp. 729-736.
5. Гриффитс А. А. Явления разрушения и течения в твёрдых телах // МиТОМ. - 1995. - № 1. - С. 9-14.
6. Штремель М. А. Разрушение. Соровский образовательный журнал. - 1997. - № 4. - С. 91-98.

## РОЛЬ ФИЗИКИ В ФОРМИРОВАНИИ ЕСТЕСТВЕНОНАУЧНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ И ПРАКТИЧЕСКИХ НАВЫКОВ БУДУЩИХ ВРАЧЕЙ

*Муслов С. А.  
ГОУ ВПО «МГМСУ»*

Преподавать ли физику будущим врачам? Этот вопрос является для многих риторическим в силу очевидности ответа - безусловно, физика, как важнейшая область естествознания, нужна будущему врачу для формирования базовых представлений о функционировании систем организма человека и навыков работы с медицинской техникой для осмыслинного их применения в будущей врачебной деятельности. Кроме того, возросшие требования к качеству медицинской помощи и совершенствование медицинских технологий всё в большей мере основываются на идеях и открытиях естественных наук путем переноса их в медицинскую среду [Марчук Г.И. и др. 1979: 3]. Другая часть аудитории, наоборот, отрицает необходимость сколько-нибудь серьезного естественнонаучного, в том числе физического образования будущих врачей-специалистов, закрепляя его целесообразность только за небольшой горсткой избранных врачей-исследователей, подготовленных, как правило, медико-биологическим факультетами отдельных вузов (РГМУ, СибГМУ, МАПО и т.д.). Но сможет ли врач квалифицированно обращаться со сложнейшим лечебным и диагностическим оборудованием, которым укомплектованы современные и высокотехнологичные клиники, не зная основных физических законов и не имея соответствующих практических навыков?

Пути развития физики и медицины всегда были переплетены между собой - не успевая размежеваться (некоторые ученые противопоставляли законы живой природы неживой), они снова объединялись. Уже в древности медицина изучала и использовала многие физические факторы, такие как механические воздействия, тепло, холод, звук, свет и др. Знаменитый художник, врач и механик Леонардо да Винчи проводил серьезные исследования механики, в том числе биомеханики. Скорее всего, на основании этого факта Американская ассоциация медицинских физиков назвала его первым медицинским физиком [Костылев В.А. 2000: 2]. И, наверное, неспроста его известная картина о пропорциях тела человека изображена на обложке базового учебника по медицинской и биологической физике, рекомендованного для изучения студентами российских медицинских ВУЗов [Ремизов А.Н. и др. 2003: 5]. Непосредственно этой проблеме была посвящена замечательная публикация [Петренко Ю. 2003: 4], в которой наравне с тезисами "физику создавали врачи", "познай самого себя и ты познаешь весь мир" был задан прямой вопрос: нужна ли физика врачам? При этом не конкретизировалось, о какой физике идет речь: общей, медицинской, биологической (например, биомеханике, биофизике и т.д.), медицинской технике или же о биомедицинском материаловедении.

При анализе взаимодействия физики и медицины уместно вспомнить, что первый медицинский факультет в России был создан в Императорском Московском университете, открытом в 1755 году по предложению великого русского ученого М.В. Ломоносова и графа И.И. Шувалова в период правления императрицы Елизаветы. Это имело огромное значение для развития высшего медицинского образования в России. В 1930 г. медицинский факультет был выделен из состава Московского университета и стал именоваться 1-ый Московский Государственный Медицинский Институт. Снова вернули медицину в университет в 1992 году, создав в МГУ факультет фундаментальной медицины. Цель состояла в том, чтобы, не снижая качества врачебной подготовки, расширить уровень знаний студентов в области фундаментальных дисциплин: физики, химии и биологии, тем самым, усилив естественнонаучную базу знаний будущих врачей.

Известно много ученых, работавших на стыке медицины и физики. Врачей к исследованиям часто побуждали вопросы, которые ставила медицина, а вклад медицины в развитие классической физики впечатляет. "Заниматься физикой я мог, только взяв медицину в придачу" - заявлял Г. Гельмгольц, знаменитый немецкий физиолог, физик и математик XIX века, начинавший свою деятельность в качестве военного врача. В. Эйтховен, окончивший университет и получивший степень доктора медицины (до конца жизни был профессором физиологии Лейденского университета), сконструировал струнный гальванометр, позволяющий регистрировать малые по величине изменения электрического потенциала и проводить электрокардиологические исследования. С помощью этого прибора определил временные и амплитудные параметры зубцов ЭКГ и впервые применил этот метод для диагностики заболеваний сердца. В середине XIX века Дюбуа-Реймон, немецкий физиолог и философ, в книге о животном электричестве писал: "В материальных частичках организмов не обнаруживается никаких новых сил, которые могли бы действовать вне них". Закон Дюбуа-Реймона - закон, устанавливающий прямую зависимость величины реакции ткани от скорости изменения плотности электрического тока. В середине XX века Н. Бор, один из создателей квантовой теории, писал: "Ни один результат биологического исследования не может быть описан иначе, как на основе понятий физики и химии" [5]. Нельзя не вспомнить имен У. Гильберта, лейб-медика, изучавшего свойства магнитов, Т. Юнга, врача больницы св. Георгия в Лондоне, египтолога и физика, одного из создателей волновой оптики, давшего объяснение природе аккомодации, астигматизма и цветового зрения, который писал, что "нет науки, сложностью превосходящей медицину, она выходит за пределы человеческого разума", Ю. Майера, ко-