Маркелова Е. Ю.

О ДЕКОМПОЗИЦИИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ОПЕРАЦИИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2008/7/45.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2008. № 7 (14). С. 120-123. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/7/

© Издательство "Грамота"

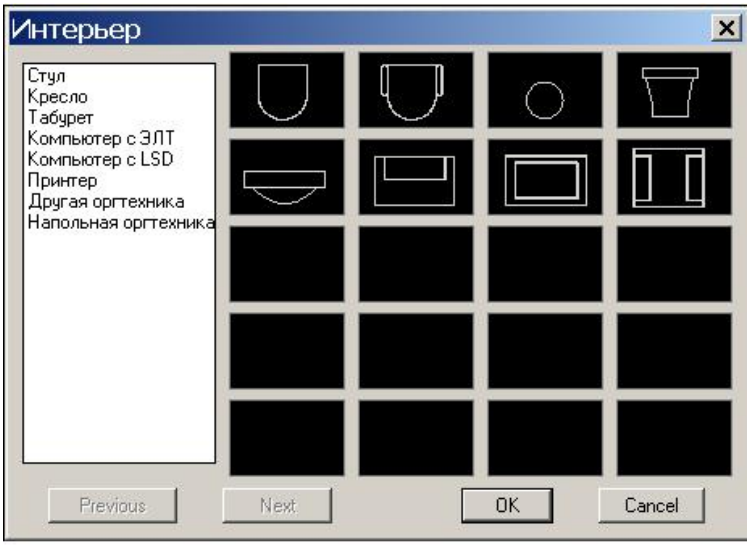
Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

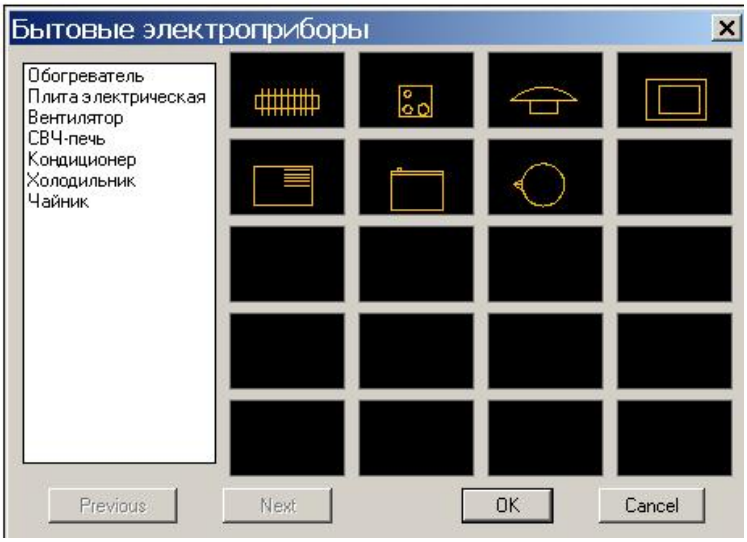
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

го моделирования позволяет создать универсальную модель документа с многопрофильной информацией, разграниченной по содержанию и виду применения.

Полученные чертежи можно использовать в качестве исходной информации для реализации трехмерной пространственной модели архитектурного ансамбля организации в целом, которая планируется на следующем этапе внедрения современных информационных систем. Трехмерная пространственная модель значительно повысит оперативность всех служб при возникновении чрезвычайных ситуаций.

Внедрение современных информационных технологий и систем повышает эффективность работы сотрудников бюро противопожарной профилактики и позволяет более оперативно решать текущие задачи этих подразделений.





О ДЕКОМПОЗИЦИИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ОПЕРАЦИИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Маркелова Е. Ю.
Челябинский государственный университет

В работах [Маркелова 1994: 1], [Markelova 1998: 2], [Ченцов 1998: 3] исследуется возможность решения задач оптимизации на основе процедуры декомпозиции экстремума, суть которой состоит в разделении на две компоненты соответствующей экстремальной операции в задачах со связанными переменными. При этом одна из компонент включается в структуру оптимизируемой функции на основе свойства разложимости критерия. В работе исследуется возможность применения принципа декомпозиции для задач принятия решения в условиях неопределенности, когда эффективность стратегий оценивается по принципу гарантированного результата. Определен класс операторов и выделены условия, при которых для поиска максиминной стратегии можно использовать процедуру «повторной» оптимизации, приводящую сложные многофакторные (в том числе дискретно- непрерывные) задачи оптимизации к системе подзадач меньшей размерности.

Пусть X, Y - произвольные непустые множества и $Z \subseteq X \times Y, \quad Z \neq \emptyset$. Обозначим через $Z^{(X)}$ - проекцию множества Z на множество X, то есть:

$$Z^{(X)} = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in Z\}; \tag{1}$$

а через $Z_{[x]}$ - сечение множества Z по элементу x, то есть:

$$\forall x \in Z^{(X)} \quad Z_{[x]} = \{y \in Y \mid (x, y) \in Z\}. \tag{2}$$

Пусть $f : Z \to R$. Обозначим через $f_{[x]}(y)$ сечение оператора f на множестве $Z_{[x]}$:

$$\forall x \in Z^{(X)} \quad f_{[x]}(y) = f(x, y), \text{ где } y \in Z_{[x]}. \tag{3}$$

Определим множество $MAXMIN(f)$ стратегий $x \in Z^{(X)}$, являющихся решением задачи поиска $\max\limits_{x \in Z^{(X)}} \min\limits_{y \in Z_{[x]}} f(x, y)$:

$$MAXMIN(f) = \{x^0 \in Z^{(X)} \mid \forall x \in Z^{(X)} : \min_{\forall y \in Z_{[x]}} f(x, y) \leq \min_{\forall y \in Z_{[x^0]}} f(x^0, y)\}, \tag{4}$$

при условии, что указанные минимумы существуют.

Пусть U_1, U_2, V_1, V_2 - произвольные непустые множества, $U = U_1 \times U_2, \quad V = V_1 \times V_2$ и $W \subseteq U \times V = U_1 \times U_2 \times V_1 \times V_2, \ W \neq \emptyset$.

Рассмотрим функции:

$$F : W \to R; \ \varphi : W^{(U_1 \times V_1)} \times R \to R; \ \psi : W \to R; \tag{5}$$

где $W^{(U_1 \times V_1)}$ - проекция множества W на множество $(U_1 \times V_1)$, определенная в соответствии с (1). Пусть $\psi_{[u_1, v_1]} : W_{[u_1, v_1]} \to R$ - сечение функционала ψ на множестве $W_{[u_1, v_1]}$ (см. (3)):

$$\forall (u_1, v_1) \in W^{(U_1 \times V_1)} : \quad \psi_{[u_1, v_1]}(u_2, v_2) = \psi(u_1, u_2, v_1, v_2), \text{ где } (u_2, v_2) \in W_{[u_1, v_1]}$$

Здесь $W_{[u_1, v_1]}$ - сечение множества W по $(u_1, v_1) \in W^{(U_1 \times V_1)}$ (см. (2)).

Задача состоит в поиске $\max\limits_{u \in W^{(U)}} \min\limits_{v \in W_{[u]}} F(u, v)$, где $u = (u_1, u_2) \in W^{(U_1 \times U_2)} = W^{(U)}$ и $v = (v_1, v_2) \in W_{[u_1, u_2]} = W_{[u]}$. Согласно (4), множество $MAXMIN(F)$ определяется следующим образом:

$$u^0 \in MAXMIN(F) \ \Leftrightarrow \ \forall u \in W^{(U)} : \min_{\forall v \in W_{[u]}} F(u, v) \leq \min_{\forall v \in Z_{[u^0]}} F(u^0, v) \tag{6}$$

Пусть $\forall w \in W$ функция $F(w)$ задана следующим образом:

$$F(w) = F(u_1, u_2, v_1, v_2) = \varphi((u_1, v_1), \ \psi_{[u_1, v_1]}(u_2, v_2)). \tag{7}$$

Вообще говоря, любую функцию можно представить в таком виде, полагая, что

$$\forall w = (u_1, u_2, v_1, v_2) \in W \quad \varphi((u_1, v_1), \psi_{[u_1, v_1]}(u_2, v_2)) = \psi(w), \quad \psi(w) = F(w)$$

Внешняя функция φ имеет смысл функции агрегирования и связывает сечение $\psi_{[u_1, v_1]}$, определенное на $W_{[u_1, v_1]}$, имеющем размерность, меньшую, чем W, с критерием $F(w)$. Нас интересуют условия, при которых при поиске *MAXMIN(F)* на множестве W можно внести операцию «$\max \min$» по части переменных под знак функции агрегирования.

Далее понадобится свойство монотонности функции агрегирования по второму аргументу $\psi_{[u_1, v_1]}$. Считаем, что φ монотонно возрастает по второму аргументу, если

$$\forall (u_1, v_1) \in W^{(U_1 \times V_1)} \quad \forall s_1 \in \psi_{[u_1, v_1]}(W_{[u_1, v_1]}) \quad \forall s_2 \in \psi_{[u_1, v_1]}(W_{[u_1, v_1]}) :$$

$$(s_1 < s_2) \Rightarrow \varphi((u_1, v_1), s_1) < \varphi((u_1, v_1), s_2),$$

где $\psi_{[u_1, v_1]}(W_{[u_1, v_1]})$ - множество образов оператора $\psi_{[u_1, v_1]}$.

Определим множество S:

$$S = \{(u_1, v_1) \in W^{(U_1 \times V_1)} \mid MAXMIN(\psi_{[u_1, v_1]}) \neq \emptyset\}.$$

Теорема. Пусть функция *F* определена в (5) и имеет представление (7). Тогда если φ монотонно возрастает по второму аргументу $\psi_{[u_1, v_1]}$ и $MAXMIN(F) \neq \emptyset$, то

$$\max_{u \in W^{(U)}} \min_{v \in W_{[u]}} F(u, v) = \max_{u_1 \in S^{(U_1)}} \min_{v_1 \in S_{[u_1]}} \varphi((u_1, v_1), \max_{u_2 \in (W_{[u_1, v_1]})^{(U_2)}} \min_{v_2 \in W_{[u_1, u_2, v_1]}} \psi_{[u_1, v_1]}(u_2, v_2)),$$

<u>Доказательство</u>.

П. 1. Покажем сначала, что при выполнении условий теоремы множество $S \neq \emptyset$, то есть $\exists (u_1, v_1) \in W^{(U_1 \times V_1)} : MAXMIN(\psi_{[u_1, v_1]}) \neq \emptyset\}$.

Так как $MAXMIN(F) \neq \emptyset$ по условию, то выберем произвольно $u^0 \in MAXMIN(F)$. Из (6) для u^0 найдется $v^0 \in W_{[u^0]} : F(u^0, v^0) = \min\limits_{\forall v \in W_{[u^0]}} F(u^0, v)$. Причем, $w^0 = (u^0, v^0) \in W$.

Из (7) следует, что $F(w^0)=\varphi((u_1^0,v_1^0),\ \psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^0,v_2^0))$. Покажем, что $u_2^0\in MAXMIN(\psi_{[u_1^0,v_1^0]})$, то есть:

$\forall u_2\in(W_{[u_1^0,v_1^0]})^{(U_2)}:\ \min\limits_{\forall v_2\in W_{[u_1^0,u_2,v_1^0]}}\psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2,v_2)\le\min\limits_{v_2\in W_{[u_1^0,u_2^0,v_1^0]}}\psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^0,v_2)$.

Предположим противное: $u_2^0\notin MAXMIN(\psi_{[u_1^0,v_1^0]})$,

тогда $\exists u_2^*\in(W_{[u_1^0,v_1^0]})^{(U_2)}:\ \min\limits_{v_2\in W_{[u_1^0,u_2^*,v_1^0]}}\psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^*,v_2)=\psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^*,v_2^*)>\min\limits_{v_2\in W_{[u_1^0,u_2^0,v_1^0]}}\psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^0,v_2)=\psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^0,v_2^0)$.

Откуда из разложения (7) и монотонности φ получим:

$F(u^*,v^*)=\varphi((u_1^0,v_1^0),\ \psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^*,v_2^*)\ >\ \varphi((u_1^0,v_1^0),\ \psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^0,v_2^0)=F(u^0,v^0)\ )$,

где $F(u^*,v^*)=F(u_1^0,u_2^*,v_1^0,v_2^*)$, $F(u^0,v^0)=F(u_1^0,u_2^0,v_1^0,v_2^0)$. Итак, нашли $u^*\in W^{(U)}$:

$\min\limits_{\forall v\in W_{[u^*]}}F(u^*,v)>\min\limits_{\forall v\in Z_{[u^0]}}F(u^0,v)$, что противоречит тому, что $u^0\in MAXMIN(F)$. Значит $u_2^0\in MAXMIN(\psi_{[u_1^0,v_1^0]})$, и $S\ne\varnothing$.

П. 2. Теперь покажем, что если $u^0\in MAXMIN(F)$,

то $F(u^0,v^0)==\varphi((u_1^0,v_1^0),\ \psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^0,v_2^0)=\max\limits_{u_1\in S^{(U_1)}}\min\limits_{v_1\in S_{[u_1]}}\varphi((u_1,v_1),\ \max\limits_{u_2\in(W_{[u_1,v_1]})^{(U_2)}}\ \min\limits_{v_2\in W_{[u_1,u_2,v_1]}}\psi_{[u_1,v_1]}(u_2,v_2))$.

В П. 1. мы уже показали, что если $u^0\in MAXMIN(F)$, то $(u_1^0,v_1^0)\in S$ и $u_2^0\in MAXMIN(\psi_{[u_1^0,v_1^0]})$.

Осталось показать, что $u_1^0\in MAXMIN(\varphi\,|\,Q)$, где $\varphi\,|\,Q$ - сужение функции φ на множество Q, а $Q=\{((u_1,v_1),r)\,|\,(u_1,v_1)\in S,\ r=\max\limits_{u_2\in(W_{[u_1,v_1]})^{(U_2)}}\ \min\limits_{v_2\in W_{[u_1,u_2,v_1]}}\psi_{[u_1,v_1]}(u_2,v_2)$.

То есть надо показать, что $\forall u_1\in S^{(U_1)}:\min\limits_{v_1\in S_{[u_1]}}\varphi((u_1,v_1),r)\le\min\limits_{\forall v_1^0\in S_{[u_0]}}\varphi((u_1^0,v_1^0),r^0)$

Предположим противное: $\exists u_1^*\in S^{(U_1)}::$

$\min\limits_{v_1\in S_{[u_1^*]}}\varphi((u_1^*,v_1),r^*)>\min\limits_{\forall v_1^0\in S_{[u_0]}}\varphi((u_1^0,v_1^0),r^0)$.

Из определения Q для r^* существует $u_2^*\in MAXMIN(\psi_{[u_1^*,v_1^*]})$ и соответствующее $v_2^*\in W_{[u_1^*,u_2^*,v_1^*]}$, такие что $r^*=\psi_{[u_1^*,v_1^*]}(u_2^*,v_2^*)$. Пусть первый из минимумов достигается при $v_1^*\in S_{[u_1^*]}$, тогда имеем в силу разложения (7):

$F(u^*,v^*)=\varphi((u_1^*,v_1^*),\psi_{[u_1^*,v_1^*]}(u_2^*,v_2^*)>\min\limits_{\forall v_1^0\in S_{[u_0]}}\varphi((u_1^0,v_1^0),r^0)=F(u^0,v^0)$.

А значит $\min\limits_{\forall v\in W_{[u^*]}}F(u^*,v)>\min\limits_{\forall v\in W_{[u^0]}}F(u^0,v)$, что противоречит тому, что $u^0\in MAXMIN(F)$. Значит, $u_1^0\in MAXMIN(\varphi\,|\,Q)$, ч.т.д.

П. 3. Осталось показать, что если $MAXMIN(F)\ne\varnothing$ и $(u^0,v^0)\in W$ удовлетворяют условию:

$\varphi((u_1^0,v_1^0),\ \psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^0,v_2^0)=\max\limits_{u_1\in S^{(U_1)}}\min\limits_{v_1\in S_{[u_1]}}\varphi((u_1,v_1),\ \max\limits_{u_2\in(W_{[u_1,v_1]})^{(U_2)}}\ \min\limits_{v_2\in W_{[u_1,u_2,v_1]}}\psi_{[u_1,v_1]}(u_2,v_2))$,

то $u^0=(u_1^0,u_2^0)\in W^{(U_1\times U_2)}\in MAXMIN(F)$.

Предположим противное: пусть $u^0\notin MAXMIN(F)$. Так как $MAXMIN(F)\ne\varnothing$, то можно предположить, что $\exists u^*=(u_1^*,u_2^*)\in MAXMIN(F):\ \min\limits_{\forall v\in W_{[u^*]}}F(u^*,v)>\min\limits_{\forall v\in Z_{[u^0]}}F(u^0,v)$. Из разложения (7) имеем:

$F(u^0,v^0)=\varphi((u_1^0,v_1^0),\ \psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^0,v_2^0))$, и $F(u^*,v^*)=\varphi((u_1^*,v_1^*),\ \psi_{[u_1^*,v_1^*]}(u_2^*,v_2^*))$,

а значит $F(u^*,v^*)>F(u^0,v^0)$

Так как $u^*\in MAXMIN(F)$, то из П. 2. имеем:

$\boldsymbol{F(u^*,v^*)}=\max\limits_{u_1\in S^{(U_1)}}\min\limits_{v_1\in S_{[u_1]}}\varphi((u_1,v_1),\ \max\limits_{u_2\in(W_{[u_1,v_1]})^{(U_2)}}\ \min\limits_{v_2\in W_{[u_1,u_2,v_1]}}\psi_{[u_1,v_1]}(u_2,v_2))$

А значит, получаем противоречивое неравенство:

$F(u^*,v^*)=\max\limits_{u_1\in S^{(U_1)}}\min\limits_{v_1\in S_{[u_1]}}\varphi((u_1,v_1),\ \max\limits_{u_2\in(W_{[u_1,v_1]})^{(U_2)}}\ \min\limits_{v_2\in W_{[u_1,u_2,v_1]}}\psi_{[u_1,v_1]}(u_2,v_2))\ >F(u^0,v^0)=$

$=\varphi((u_1^0,v_1^0),\ \psi_{[u_1^0,v_1^0]}(u_2^0,v_2^0)=\max\limits_{u_1\in S^{(U_1)}}\min\limits_{v_1\in S_{[u_1]}}\varphi((u_1,v_1),\ \max\limits_{u_2\in(W_{[u_1,v_1]})^{(U_2)}}\ \min\limits_{v_2\in W_{[u_1,u_2,v_1]}}\psi_{[u_1,v_1]}(u_2,v_2))/$

Теорема доказана.

Отметим, что существенным является то, что внешний «максимин» в правой части равенства в формулировке теоремы берется не по всему множеству $W^{(U)}$, а только по его части *S,* где достигается внутренний

«максимин». Для замены S на $W^{(U)}$ необходимо потребовать достижения «максимина» функций $\psi_{[u_1,v_1]}(u_2,v_2)$ для всех $(u_1,v_1)\in W^{(U_1\times V_1)}$.

Список использованной литературы

1. **Маркелова Е. Ю.** Многокритериальная оптимизация в условиях обобщенной разложимости целевой вектор-функции // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. - Пермь: ПГТУ, 1994. - № 1.
2. **Маркелова Е. Ю., Рольщиков В. Е., Ченцов А. Г.** Задача маршрутизации конечного числа переходов системы с абстрактной функцией агрегирования затрат. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 1998. - С. 17. – Деп. ВИНИТИ № 1577-И98. - 25.05.98.
3. **Markelova E. Yu.** Decomposition Method in One Optimal Problem // Inter. Workshop «Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization». - Chelyabinsk, 1998.

НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛЬЕНАРА

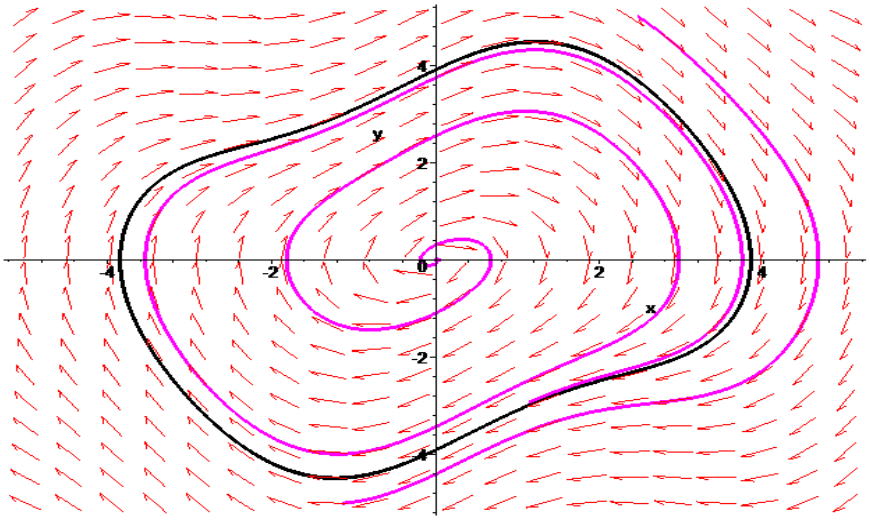
Мачулис В. В.
Тюменский государственный университет

Рассмотрим уравнение

$$x''(t)-\varepsilon x'(t)\cos x(t)+x(t)=0, \qquad (1)$$

где $\varepsilon>0$. Это уравнение со слабой нелинейностью. Нас интересует наличие в уравнении предельных циклов и аналитическое приближение одного из них. Уравнение (1) удовлетворяет всем условиям теоремы Льенара [Мачулис 2008: 5], за исключением последнего. А именно, в последнем условии теоремы требуется, чтобы нечетная функция $F(x)=-\int_0^x \varepsilon\cos t dt$ имела в точности один положительный нуль $x=a>0$. В рассматриваемом случае функция $F(x)$ имеет бесконечно много положительных нулей. Кроме того, она не стремится к бесконечности при $x\to\infty$, как требует условие.

В то же время нелинейный член $-\varepsilon\cos x(t)x'(t)$ действует как «положительное торможение» при $\cos x(t)<0$, и как «отрицательное торможение» при $\cos x(t)>0$. Это позволяет предполагать наличие, по крайней мере, одного предельного цикла. Расчеты на компьютере показали, что такой предельный цикл действительно существует.



Попробуем найти аналитическое приближение этого предельного цикла для $\varepsilon=0{,}8$ и $0\le t\le 50$. Используя численные расчеты для предельного цикла, определим начальные условия, как $x(0)=3{,}8461248242$ и $x'(0)=0$. Прямое возмущенное разложение по степеням ε оказывается непригодным из-за наличия в нем векового члена. Воспользуемся методом двух масштабов.

Положим в (1) $\tau=t=O(1)$ («быстрая» переменная) и $T=\varepsilon t$ («медленная» переменная). Мы будем считать τ и T независимыми. Далее применяем известную процедуру, подробно изложенную в статье [Мачулис 2008: 5]. В результате сначала получаем систему для определения коэффициентов разложения $x_0(t)$ и $x_1(t)$: