Филиппенко Виктор Игнатьевич

ОБОБЩЁННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2009/11-1/18.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2009. № 11 (30): в 2-х ч. Ч. I. С. 87-89. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2009/11-1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

ОБОБЩЁННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

Филиппенко Виктор Игнатьевич
Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

В настоящей работе рассматривается некоторое обобщение линейного формально-самосопряженного квазидифференциального оператора. Построены его обобщенные резольвенты, позволяющие находить все его спектральные функции (как ортогональные, так и обобщенные).

Пусть H - конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и нормой $\|.\|$. Рассмотрим на интервале (a,b) измеримую функцию $A(t)$, значениями которой являются неотрицательные операторы в H, т.е. такую матричную функцию размерности $m\times m$, что для всех $x\in H$ $(A(t)x,x)\geq 0$. Предположим, что $\|A(t)\|$ - суммируемая функция на любом конечном отрезке $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Обозначим через l квазидифференциальное выражение порядка n, порожденное матрицей-функцией F.

Пусть $F=(f_{ij})$ - $(n\times n)$ - матрица, элементами которой при каждом фиксированном $t\in(a;b)$ являются ограниченные самосопряженные операторы в пространстве H; $f_{i,i+1}^{-1}$, $i=1,...,n-1$ существуют и ограничены при $t\in(a;b)$ и удовлетворяют следующим условиям:

(1) $f_{ij}=0$ в интервале $I=(a,b)$ для индексов, удовлетворяющих неравенствам $2\leq i+1<j\leq n$;

(2) f_{ij} - локально суммируемы, т. е. $f_{ij}\in L_{loc}(I)$ для $1\leq i,j\leq n$;

(3) $f_{i,i+1}\neq 0$ в I для $1\leq i\leq n-1$.

Определим квазипроизводные $y^{[k]}$ следующим образом:

$$y^{[0]}=y,\ y^{[i]}=f_{i,i+1}^{-1}\left[\left(y^{[i-1]}\right)'-\sum_{j=1}^{i}f_{ij}y^{[j-1]}\right],\ i=1,...,n-1,\ y^{[n]}=\left(y^{[n-1]}\right)'-\sum_{j=1}^{n}f_{nj}y^{[j-1]}.$$

Соответствующий симметрический оператор с плотной областью определения в скалярном случае рассматривался в работе автора [Филиппенко, 2006, с. 311]. Случай дифференциальной операции произвольного порядка рассматривал Э. Коддингтон [Coddington, 1958, p. 380].

Предположим, что рассматриваемые функции y и их квазипроизводные до $(n-1)$ - го порядка включительно абсолютно непрерывны на компактах из промежутка I.

Поскольку в дальнейшем будем рассматривать только симметрические квазидифференциальные выражения, то предположим, что операторная матрица F, кроме требований (1), (2) и (3), удовлетворяет также условию симметричности $F=-J^{-1}F^{*}J$, где F^{*} - матрица, сопряженная к матрице F, $J_n=\left((-1)^{s}\delta_{s,n+1-j}E\right)$, δ_{sk} - символ Кронекера, а E - единичный оператор в пространстве H. Если натуральное число n - четно, то J - косоэрмитова матрица. Если натуральное n - нечетно, то $iJ,-iJ$ - косоэрмитовы матрицы.

Можно считать, что скалярное квазидифференциальное выражение $l_n[y]=i^{n}y^{[n]}$, где i - мнимая единица, порождается операторной матрицей F.

На множестве непрерывных и финитных в окрестности точек a,b вектор-функций со значениями в пространстве H введем скалярное произведение $\langle y,z\rangle=\int_a^b\left(A(t)y(t),z(t)\right)dt$. Отождествляя с нулем функции y, для которых $\langle y,y\rangle=0$, и производя пополнение, получим гильбертово пространство $L^2\left(H,A(t);a,b\right)$. Пусть G_t - множество элементов из пространства H, на которых оператор $A(t)$ обращается в нуль; $A_0(t)$ - сужение оператора $A(t)$ на подпространство $H_t=H\Theta G_t$. Оператор $A_0(t)$, действующий в пространстве H_t, имеет обратный $A_0^{-1}(t)$.

Пусть D_0' - множество всех вектор-функций $y(t)$, для которых выполняются условия:

а) квазипроизводные функции $y(t)$ существуют, абсолютно непрерывны до порядка $n-1$ включительно и почти при всех t $\{l[y]\}(t)\in H_t$;

б) $A_0^{-1}(t)l[y]$ принадлежит $L^2\left(H,A(t);a,b\right)$;

в) $y^{[k]}(a)=y^{[k]}(b)=0$ $(k=0,...,n-1)$ при регулярных концах a,b и $y(t)$ обращается в нуль в окрестности сингулярного конца. Функции из многообразия D_0' принадлежат $L^2(H,A(t);a,b)$. Поставим в соответствие каждой функции $y(t)$ из линейного многообразия D_0' функцию $A_0^{-1}(t)l[y]$. Таким образом, в пространстве $L^2(H,A(t);a,b)$ получено линейное отношение L_0'. Отношение L_0' симметрическое; L_0 - его замыкание. В случае, когда оба конца интервала (a,b) регулярны, $L_0'=L_0$. Отношение L_0^*, сопряженное к отношению L_0, состоит из пар $\{y,A_0^{-1}(t)l[y]\}$, для которых: а) $l[y]$ имеет смысл и почти при всех t $\{l[y]\}(t)\in H_t$; б) $A_0^{-1}(t)l[y]$, $y(t)$ принадлежат $L^2(H,A(t);a,b)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение $l[y]-\lambda A(t)y=0$, где λ - комплексное число. Зафиксируем какую-либо точку s_0 в интервале (a,b). Пусть $W_j(t,\lambda)$ - операторное решение уравнения $l[y]-\lambda A(t)y=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $W_j^{[k-1]}(s_0,\lambda)=\delta_{jk}E$ (E -тождественный оператор, δ_{jk} -символ Кронекера; $j,k=1,...,n$). Обозначим через $W(t,\lambda)$ операторную однострочную матрицу $(W_1(t,\lambda),...,W_n(t,\lambda))$. При фиксированных t,λ $W(t,\lambda)$ - оператор из H^n в H. Сопряженный к $W(t,\lambda)$ оператор $W^*(t,\lambda)$ отображает H в H^n.

Неотрицательный оператор $I_{\alpha\beta}(\lambda)$, действующий в пространстве H^n, определим формулой $I_{\alpha\beta}(\lambda)=\int_\alpha^\beta W^*(t,\lambda)A(t)W(t,\lambda)dt$ $(a<\alpha<\beta<b)$.

Пусть Q_0 - множество элементов $x\in H^n$, удовлетворяющих условию $I_{\alpha\beta}(\lambda)x=0$. Q_0 не зависит от λ [Коган, Рофе-Бекетов, 1975, с. 10]. Положим $Q=H^n\Theta Q_0$. Из [Там же, с. 12] следует, что найдутся вещественные числа α_0,β_0 $(a<\alpha_0<\beta_0<b)$, не зависящие от переменных x,λ, для которых при всех $x\in Q$ выполняется неравенство

$$\left(I_{\alpha_0\beta_0}(\lambda)x,x\right)\ge\varepsilon\|x\|^2\quad(\varepsilon=\varepsilon(\lambda)>0)\tag{1}$$

В промежутке $[\alpha_0,\beta_0]$ существует бесчисленное множество непересекающихся интервалов (α,β) таких, что $I_{\alpha\beta}(\lambda)$ обратим на множестве Q. Действительно, разобьем $[\alpha_0,\beta_0]$ точками $\alpha_0=t_0<t_1<...<t_k=\beta_0$ на $k(k>4)$ равных частей так, чтобы

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|W^*(t,\lambda)\|\|A(t)\|\|W(t,\lambda)\|dt<\frac{\varepsilon}{4}\quad(j=0,...k-1)\tag{2}$$

В силу (1) найдется интервал $(t_\nu,t_{\nu+1})$ со свойством $\left(I_{t_\nu,t_{\nu+1}}(\lambda)x,x\right)\ge\|x\|^2\frac{\varepsilon}{k}$ $(x\in Q)$. Из (1), (2) следует, что выполняется, по крайней мере, одно из неравенств

$$\left(I_{\alpha_0,t_\nu}(\lambda)x,x\right)\ge\|x\|^2\frac{\varepsilon}{3};\ \left(I_{t_{\nu+1}\beta_0}(\lambda)x,x\right)\ge\|x\|^2\frac{\varepsilon}{3}.$$

Повторяя рассуждения, получим требуемое утверждение.

Как известно [Dijksma, Snoo, 1974, p. 75], преобразование Кэли устанавливает взаимно однозначное соответствие между симметрическими (самосопряженными) отношениями и изометрическими (унитарными) операторами. Отсюда следует, что существует гильбертово пространство $\hat{H}$ и самосопряженное отношение $\hat{L}\subset\hat{H}\oplus\hat{H}$ со свойствами: $\hat{H}\supset L^2(H,A(t);a,b)$ и $\hat{L}\supset L_0$. При любом невещественном λ $\hat{R}_\lambda=\left(\hat{L}-\lambda E\right)^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором в $\hat{H}$. Пусть P - ортогональный проектор $\hat{H}$ на $L^2(H,A(t);a,b)$. Семейство операторов R_λ, определенных формулой $R_\lambda f=P\left(\hat{L}-\lambda E\right)^{-1}f$ $\left(f\in L^2(H,A(t);a,b)\right)$, называется обобщенной резольвентой симметрического отношения L_0.

А. В. Штраусом получена формула всех обобщенных резольвент симметрического оператора. В [Коган, Рофе-Бекетов, 1975, с. 25] показано, что эта формула остается справедливой и для симметрических отношений.

Обозначим символом N_λ - дефектное подпространство отношения L_0. Его можно определить как ортогональное дополнение в $L^2(H,A(t);a,b)$ к области значений отношения $L_0-\lambda E$. Зафиксируем какое-либо

невещественное число λ_0. Пусть $F(\lambda)$ - регулярная не превосходящая по норме единицы операторная функция из N_{λ_0} в $N_{\bar{\lambda}_0}$, $L_{F(\lambda)}$ - отношение, состоящее из пар вида $\{y+F(\lambda)z-z, y_1+\lambda_0 F(z)-\bar{\lambda}_0 z\}$, где $\{y, y_1\}\subset L_0$, $z\in R_{\lambda_0}$. Семейство операторов R_λ тогда и только тогда будет обобщенной резольвентой отношения L_0, когда R_λ представимо в виде $R_\lambda=\left(L_{F(\lambda)}-\lambda\right)^{-1}$ $(\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}\lambda_0>0)$.

Установим, что любая обобщенная резольвента R_λ отношения L_0 является интегральным оператором. При этом среди множества функций, отождествленных в пространстве $L^2(H, A(t); a, b)$ с функцией $R_\lambda f$ $\left(f\in L^2(H, A(t); a, b)\right)$, будем отыскивать такую функцию $y(t)$, что $l[y]$ имеет смысл, при почти всех t $\{l[y]\}(t)\in H_t$ и

$$l[y]-\lambda A(t)y=A(t)y \qquad (3)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Всякая обобщенная резольвента отношения L_0 является при каждом невещественном λ интегральным оператором $R_\lambda f=\int_a^b K(t,s,\lambda)A(s)f(s)ds$ $\left(f\in L^2(H, A(t); a, b)\right)$. Ядро $K(t,s,\lambda)$ имеет вид $K(t,s,\lambda)=W(t,\lambda)\left[M_1(\lambda)-\operatorname{sgn}(s-t)J_n^{-1}(s)/2\right]W^*(s,\bar{\lambda})$, где $M_1(\lambda)=M_0\oplus M(\lambda)$ -операторная функция в H^n, представимая в виде ортогональной суммы операторов M_0 и $M(\lambda)$.*

Список использованной литературы

1. **Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С.** О квадратично интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка. Харьков: Физико-технический ин-т низких температур АН УССР, 1973.
2. **Филиппенко В. И.** Линейные квазидифференциальные операторы в гильбертовом пространстве // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2006. С. 293-344.
3. **Coddington E. A.** Generalized resolutions of the identity for symmetric ordinary differential operators // Annals of Mathematics. 1958. V. 68. № 2. P. 378-392.
4. **Dijksma A., Snoo H. S. V.** Self-adjoint extensions of symmetric subspaces. Pacific J. Math. 1974. № 1. P. 71-100.
5. **Kogan V. I., Rofe-Beketov F. S.** On square-integrable solutions of symmetric systems of differential equations of arbitrary order. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1974-1975. P. 5-40.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (НА ПРИМЕРЕ ПРОЦЕССА НАГРЕВАНИЯ ТОЛСТОЙ СТЕНКИ)

Ходырева Наталья Геннадиевна
Филиал ГОУ ВПО «Московский энергетический институт» в г. Волжском

Построение и исследование математических моделей важно практически во всех отраслях знаний, но вместе с тем сопряжено с необходимостью использования многих разделов математики, в том числе теории дифференциальных уравнений. Наиболее рациональными и результативными методами решения дифференциальных уравнений являются численные методы.

Рассмотрим решение дифференциального уравнения в частных производных, описывающее процесс нагревания толстой стенки толщиной L, к которой с двух сторон подводится тепло, без внутренних тепловыделений.

Пространственное распределение температуры на каждый момент времени можно описать функцией двух переменных $\Theta(x,t)$, где x - координата точки отрезка, t - время в секундах. Пусть для определенности $0<x<1$, $0<t\le T$. Если выделить небольшой участок по ширине пластины длиной Δx и рассмотреть изменение энергии за время Δt, то, учитывая теплоемкость пластины C на единицу длины, приближенное равенство энергии этого участка можно записать следующим образом:

$$E\approx C\cdot\Theta(x,t)\cdot\Delta x.$$

Если принять, что температура всего участка постоянна и равна $\Theta(x,t)$, то чем меньше будет Δx, тем точнее выполняется это равенство. Данное утверждение является основой многоточечного приближения.

Следовательно, за время Δt изменение энергии будет равно:

$$\Delta E=\left(C\cdot\Theta(x,t+\Delta t)-C\cdot\Theta(x,t)\right)\cdot\Delta x.$$