Бобова Мария Александровна, Мачулис Владислав Владимирович

ГОМОКЛИНИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

В статье проводится качественное исследование одной динамической системы на плоскости с параметром. Проанализированы области значений параметра, в которых качественное поведение системы различно. Предпринята попытка доказательства существования гомоклинической траектории и выполнен ее численный расчет.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/10/8.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 10 (65). С. 33-36. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/10/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

Список литературы

1. **Алексеев В. А.** «Штурм небес» отменяется?: критические очерки по истории борьбы с религией в СССР. М., 1992. 299 с.
2. **Баланцев А. В.** Комсомол и Русская Православная Церковь: начало противостояния // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 7. С. 10-12.
3. **Баланцев А. В., Слезин А. А.** Особенности противодействия комсомольских организаций влиянию ислама в начале 1920-х гг. // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 9 (64). С. 15-20.
4. **Государственный архив социально-политической истории Тамбовской области** (ГАСПИТО). Ф. 1205. Оп. 1.
5. **Дик А. А., Слезин А. А.** Обзоры политических настроений как источники по изучению социально-политической истории 1920-х годов // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2005. Т. 11. № 4. С. 1044-1046.
6. **Комсомол на Севере.** Архангельск, 1924. 65 с.
7. **Матвейчук Н. И.** Славный путь: воспоминания. М., 1958. 122 с.
8. **Российский государственный архив социально-политической истории** (РГАСПИ). Ф. М-1. Оп. 23.
9. **Сердюкова Н. В.** Государственная политика советского государства в области религии в 1920-е гг. (на материалах Северного Кавказа): дисс. … канд. ист. наук. М., 2006. 172 с.
10. **Слезин А. А.** Антирелигиозная деятельность комсомола в период становления нэпа (1921-1924 гг.) // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2000. Т. 6. № 1. С. 160-166.
11. **Слезин А. А.** Антирелигиозные политсуды 1920-х годов как фактор эволюции общественного правосознания // Право и политика. 2009. № 5. С. 1156-1159.
12. **Слезин А. А.** Антирелигиозные праздники 1920-х гг. // Вопросы истории. 2010. № 12. С. 82-91.
13. **Слезин А. А.** Политический контроль среди молодежи 1920-х гг.: победы на «фронте повседневности» // Исторические, философские, политические и юридические науки, культурология и искусствоведение. Вопросы теории и практики. Тамбов: Грамота, 2011. № 3. Ч. 2. С. 179-184.
14. **Слезин А. А.** Роль комсомола в реализации политики советского государства в отношении религии: 1918-1921 гг. // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. 2009. № 9. С. 82-87.
15. **Слезин А. А.** Становление монополии комсомола в молодежном движении России // Клио. 1997. № 1. С. 134-139.
16. **Слезин А. А.** Чем привлекал и чем отталкивал комсомол в годы нэпа (по материалам Тамбовской губернии) // Клио. 1999. № 3 (9). С. 153-162.
17. **Слезин А. А., Баланцев А. В.** Советское государство в борьбе с религиозным влиянием среди западных колонистов: роль комсомола (на материалах автономии немцев Поволжья, 1921-1925 гг.) // Политика и общество. 2009. № 10. С. 53-57.
18. **Слезин А. А., Рябцева Е. В**. Советская государственная политика в отношении религии: начальный этап // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2012. Т. 18. № 2. С. 493-497.
19. **Тендит К. Н.** Православная и советская культуры: точки сопряжения культовых традиций // Исторические, философские, политические и юридические науки, культурология и искусствоведение. Вопросы теории и практики. Тамбов: Грамота, 2011. № 4. Ч. 3. С. 166-174.

УДК 517.925.41
Физико-математические науки

В статье проводится качественное исследование одной динамической системы на плоскости с параметром. Проанализированы области значений параметра, в которых качественное поведение системы различно. Предпринята попытка доказательства существования гомоклинической траектории и выполнен ее численный расчет.

Ключевые слова и фразы: простое и сложное состояния равновесия; гомоклиническая траектория; сфера Пуанкаре; инвариантное многообразие.

Мария Александровна Бобова
Отделение «Математика»
Институт математики, естественных наук и информационных технологий
Тюменский государственный университет
bobova-m@mail.ru

Владислав Владимирович Мачулис
Кафедра математического моделирования
Институт математики, естественных наук и информационных технологий
Тюменский государственный университет
mareliks@gmail.com

ГОМОКЛИНИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ©

Рассматривается двумерная динамическая система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x + xy - \varepsilon x^3, \tag{1}$$

© Бобова М. А., Мачулис В. В., 2012

где ε - параметр, причем $\varepsilon \in (0;2]$. Система имеет три неподвижные точки: $(0;0)$, $\left(1/\sqrt{\varepsilon};0\right)$ и $\left(-1/\sqrt{\varepsilon};0\right)$. Исследуем их характер.

Для любой неподвижной точки системы имеют место формулы

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+y-3\varepsilon x^2 & x \end{pmatrix}, \quad \sigma = x,$$

где Δ - определитель матрицы Якоби и σ - её след. Точке $\left(1/\sqrt{\varepsilon};0\right)$ соответствуют $\Delta = 2$ и $\sigma = 1/\sqrt{\varepsilon}$ (что говорит о ее простом характере), а также собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\frac{1-8\varepsilon}{4\varepsilon}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{\frac{1-8\varepsilon}{4\varepsilon}}$$

Если $\varepsilon \in (0;1/8]$, то собственные значения положительны, т.е. данная точка – неустойчивый узел. При $\varepsilon \in (1/8;2]$ собственные значения комплексно-сопряжённые с положительной действительной частью, т.е. неподвижная точка – неустойчивый фокус.

Точка $\left(-1/\sqrt{\varepsilon};0\right)$ также простое состояние равновесия. Ее собственные значения

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\frac{1-8\varepsilon}{4\varepsilon}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{\frac{1-8\varepsilon}{4\varepsilon}}$$

Легко видеть, что при $\varepsilon \in (0;1/8]$ собственные значения отрицательны. Следовательно, неподвижная точка – устойчивый узел. Если $\varepsilon \in (1/8;2]$, то собственные значения комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью. Следовательно, неподвижная точка – устойчивый фокус.

Перейдем к рассмотрению состояния равновесия $(0;0)$.

При любых указанных значениях параметра собственные значения постоянны: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Это означает, что неподвижная точка $(0;0)$ – седло. Определим угловые коэффициенты направлений, по которым траектории стремятся к простому состоянию равновесия согласно следующим формулам:

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - P'_x(x_0, y_0)}{P'_y(x_0, y_0)}, \quad k_2 = \frac{\lambda_2 - P'_x(x_0, y_0)}{P'_y(x_0, y_0)}$$

Значения $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$, полученные по этим формулам, определяют углы $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

Определим для данной неподвижной точки C^r – гладкие инвариантные многообразия W^s_{loc} и W^u_{loc} способом, описанным в [3]. Для этого систему приводим к каноническому виду в окрестности неподвижной точки.

Предполагаем, что существует неособенное линейное преобразование

$$\begin{cases} u = p_{11}x + p_{12}y \\ v = p_{21}x + p_{22}y \end{cases} \tag{2}$$

Тогда существует и обратное преобразование

$$\begin{cases} x = q_{11}u + q_{12}v \\ y = q_{21}u + q_{22}v \end{cases}, \tag{3}$$

где

$$q_{11} = \frac{p_{22}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}, \quad q_{12} = -\frac{p_{12}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}, \quad q_{21} = -\frac{p_{21}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}, \quad q_{22} = \frac{p_{11}}{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}$$

Применяем формулы для коэффициентов p_{ij} ([2]). Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем соотношения

$$\frac{p_{12}}{p_{11}} = -1, \quad \frac{p_{22}}{p_{21}} = 1$$

Эти соотношения дают возможность определить соответствующие равенства, при помощи которых формулы (3) примут вид

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2p_{11}}u + \frac{1}{2p_{22}}v \\ y = -\frac{1}{2p_{11}}u + \frac{1}{2p_{22}}v \end{cases} \tag{4}$$

Подставим полученные выражения в систему (1) и, приняв $p_{11} = p_{22} = \frac{1}{4}$, после преобразований получим

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + u^2 - v^2 + 2\varepsilon(u+v)^3 \\ \dot{v} = v - u^2 + v^2 - 2\varepsilon(u+v)^3 \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) является канонической формой исходной системы.

Вернемся к задаче нахождения уравнений для инвариантных многообразий $W^s_{loc}:\ v = \psi(u)$ и $W^u_{loc}:\ u = \varphi(v)$, где

$$\begin{cases} \psi(0) = 0,\ \psi'(0) = 0 \\ \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0 \end{cases}$$

Учитывая (5), условия инвариантности многообразий для данной системы имеют вид (см. [3])

$$\begin{cases} \psi(u) - u^2 + \psi^2(u) - 2\varepsilon(u+\psi(u))^3 = \psi'(u)\left(-u + u^2 - \psi^2(u) + 2\varepsilon(u+\psi(u))^3\right) \\ -\varphi(v) + \varphi^2(v) - v^2 + 2\varepsilon(\varphi(v)+v)^3 = \varphi'(v)\left(v - \varphi^2(v) + v^2 - 2\varepsilon(\varphi(v)+v)^3\right) \end{cases} \quad (6)$$

Разложим функции $\varphi(v)$ и $\psi(u)$ в ряды Тейлора с неопределенными коэффициентами

$$\varphi(v) = \varphi_2 v^2 + \varphi_3 v^3 + \varphi_4 v^4 + \ldots$$

$$\psi(u) = \psi_2 u^2 + \psi_3 u^3 + \psi_4 u^4 + \ldots$$

и подставим их в выражения (6). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u и v, получим уравнения для инвариантных многообразий:

$$\begin{aligned} W^s_{loc}:\ & v = \frac{1}{3}u^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{\varepsilon}{2}\right)u^3 + \left(\frac{7}{90} + \frac{29\varepsilon}{30}\right)u^4 + \ldots \\ W^u_{loc}:\ & u = -\frac{1}{3}v^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{\varepsilon}{2}\right)v^3 - \left(\frac{7}{90} + \frac{29\varepsilon}{30}\right)v^4 + \ldots \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты в правых частях выражений (7) быстро уменьшаются, и ряды для $\varphi(v)$ и $\psi(u)$ сходятся.

Обратимся теперь к доказательству существования гомоклинической траектории для неподвижной точки $(0;0)$ при $\varepsilon \in (1/8;2]$.

Вначале вычислим суммы индексов Пуанкаре для имеющихся состояний равновесия. Как известно (см. [2]), индекс простого состояния равновесия динамической системы равен +1 в случаях фокуса или узла и равен -1 в случае седла. Для замкнутой траектории динамической системы индекс Пуанкаре равен +1. Так как в нашей системе сумма индексов Пуанкаре всех состояний равновесия равна +1, то возможно существование замкнутой траектории, ограничивающей все неподвижные точки.

Докажем существование такой траектории. Исследуем поведение системы в бесконечно-удаленных точках, лежащих на оси Ох, при помощи сферы Пуанкаре (см. [1; 2]). В исходной системе введем замену переменных

$$x = \frac{1}{z},\ y = \frac{u}{z}$$

Получим

$$\frac{du}{dt} = 1 + \frac{u}{z} - u^2 - \frac{\varepsilon}{z^2},\quad \frac{dz}{dt} = -zu \quad (8)$$

Если принять

$$\frac{dt}{z^2} = d\tau, \quad (9)$$

то получим новую систему, траектории которой совпадают с траекториями системы (8)

$$\frac{du}{d\tau} = z^2 + uz - u^2z^2 - \varepsilon,\quad \frac{dz}{d\tau} = -z^3u \quad (10)$$

Правые части системы (10) нигде не обращаются в нуль одновременно. На сфере траекториям этой системы соответствуют большие окружности, пересекающиеся в двух диаметрально противоположных точках экватора, являющихся особыми точками системы (10).

Вернемся к исходной системе (1) и воспользуемся еще раз преобразованием Пуанкаре для исследования системы в бесконечно удаленных точках, лежащих на оси Оу

$$x = \frac{v}{z},\ y = \frac{1}{z}$$

При этом получим

$$\frac{dv}{dt} = 1 - v^2 - \frac{v^2}{z} + \varepsilon\frac{v^4}{z^2},\quad \frac{dz}{dt} = -\frac{v}{z} - v + \varepsilon\frac{v^3}{z} \quad (11)$$

После аналогичной (9) замены, система (11) примет вид

$$\frac{dv}{d\tau} = z^2 - v^2 z^2 - v^2 z + \varepsilon v^4, \quad \frac{dz}{d\tau} = -vz^3 - vz^2 + \varepsilon v^3 z \qquad (12)$$

Полученная для системы (12) особая точка является сложной.

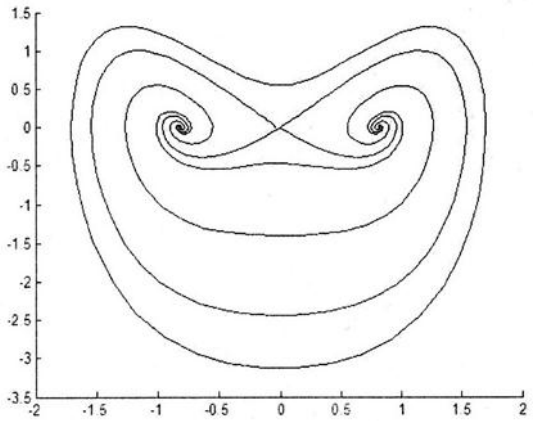
Данная система интегрируема в квадратурах, и аналитический вид ее решения может быть получен, например, при помощи математического пакета *Maple*. Мы не приводим это решение в виду громоздкости. При $\varepsilon \in (0;1/8]$ в окрестности особой точки имеются лишь параболические сектора, из чего следует, что все траектории, соответствующие седлу $(0;0)$ и двум фокусам, заходят в бесконечно удаленную особую точку. Если же $\varepsilon \in (1/8;2]$, то окрестность сложной особой точки содержит также и гиперболические сектора. Поэтому, а также в силу леммы, приведенной в [2], можно судить, что имеется семейство замкнутых траекторий, окружающих три состояния равновесия – седло и два фокуса.

На следующем этапе доказательства воспользуемся критерием Бендиксона, который позволит доказать отсутствие замкнутых траекторий, или замкнутых контуров, составленных из траекторий, в определенных областях фазового пространства. В силу критерия

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = x$$

в областях $x > 0$ и $x < 0$ не существует простых замкнутых кривых, состоящих из траекторий системы. В частности, для особых точек типа фокус, лежащих симметрично относительно оси ординат, не существует предельных контуров из траекторий, им соответствующих. Отсутствие предельных контуров говорит о том, что любая траектория, выходящая (или входящая) из любой из этих точек, пересекает ось ординат. А поскольку фокус является орбитно-устойчивым, любая из траекторий, «выходящих» из неустойчивого фокуса, «входит» в устойчивый фокус и наоборот. В связи с этим, множество траекторий, соответствующих обоим фокусам, находится сколь угодно близко к множеству замкнутых траекторий системы, существование которых было доказано выше. Замкнутые траектории, как и траектории фокусов, являются орбитно-устойчивыми, что и дает доказательство существования гомоклинической траектории седла $(0;0)$.

Численные расчеты для гомоклинической траектории при $\varepsilon \in (1/8;2]$ можно получить, например, с помощью программы *Matlab*. На рисунке представлен фазовый портрет системы с гомоклинической траекторией при $\varepsilon = 1,5$.



Список литературы

1. **Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний. М.: Государственное издательство физ.-мат. литературы, 1959. 915 с.
2. **Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.** Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
3. **Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.** Методы качественной теории в нелинейной динамике. М. - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с.