2. **Гасанов Э. Э., Майлыбаева Г. А.** Доступ к базам данных без раскрытия запросов // Материалы конференции «Математика и безопасные информационные технологии», Москва, 23-24 октября 2003 г. - 2003. - С. 393-395.

3. **Andreev A. E., Clementi A. E. F., Rolim J. D. P.** On the Parallel Computations of Boolean Functions on Unrelated Inputs // IV IEEE Israel Symposium on Theory of Computing and Systems (ISTCS'96). - IEEE. - 1996. - P. 155-161.

4. **Назаров М. Н.** Параллельный доступ к базам данных и булевы функции // Интеллектуальные системы. - 2003. - Т. 7. - С. 365-381.

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Орлова Е. Б.
Тюменский государственный университет

В классической теории оболочек существует операторный метод, позволяющий свести систему трех дифференциальных уравнений в частных производных к одному уравнению восьмого порядка и в дальнейшем провести его асимптотический анализ [Гольденвейзер, 1979].

При рассмотрении аналогичной задачи для ортотропной цилиндрической оболочки при использовании сдвиговой гипотезы С.П. Тимошенко в силу большего порядка исходной системы и большего количества независимых физических постоянных процесс получения аналогичного уравнения значительно усложнится. В такой ситуации становится неизбежным применение пакетов символьной математики, позволяющих исследователю проделывать аналитические преобразования с большим количеством величин.

Таким образом, было получено разрешающее уравнение задачи

$$
\begin{aligned}
&\Biggl\{-\frac{G_{12}}{k}a^2\frac{1}{G_{13}}\frac{\partial^{10}}{\partial\alpha^{10}}+\frac{4G_{12}\nu_1\nu_2-G_{12}\nu_1-2E_1\nu_2}{k\nu_1}\frac{1}{G_{13}}a^2\frac{\partial^{10}}{\partial\alpha^8\partial\beta^2}-\\
&-\frac{2G_{12}^2\nu_1\nu_2(1+2\nu_1\nu_2)-4G_{12}^2\nu_1^2\nu_2-4G_{12}\nu_1\nu_2^2E_1+2G_{12}\nu_1\nu_2E_1+E_1^2\nu_2^2}{kG_{12}\nu_1^2}\frac{1}{G_{13}}a^2\frac{\partial^{10}}{\partial\alpha^6\partial\beta^4}-\\
&-\frac{2G_{12}^2\nu_1\nu_2(1+2\nu_1\nu_2)-4G_{12}^2\nu_1\nu_2^2-4G_{12}\nu_1\nu_2^2E_1+2G_{12}\nu_2^2E_1+E_1^2\nu_2^2}{kG_{12}\nu_1^2}\frac{1}{G_{13}}a^2\frac{\partial^{10}}{\partial\alpha^4\partial\beta^6}+\\
&+\frac{4G_{12}\nu_1\nu_2^2-G_{12}\nu_2^2-2E_1\nu_2^2}{k\nu_1^2}\frac{1}{G_{13}}a^2\frac{\partial^{10}}{\partial\alpha^2\partial\beta^8}-\frac{G_{12}}{k}\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}a^2\frac{\partial^{10}}{\partial\beta^{10}}+\\
&+\left(4+a^2+\frac{E_1G_{12}\nu_2}{k^2\nu_1G_{13}^2}a^2\right)\frac{\partial^8}{\partial\alpha^8}+\biggl(\frac{G_{12}(1-\nu_1\nu_2)}{E_1}\left(16+a^2\right)+\frac{E_1}{G_{12}}\frac{\nu_2}{\nu_1}\left(4+a^2\right)-\\
&-2\nu_2a^2+\frac{E_1\nu_2^2(E_1-2G_{12}\nu_1)}{k^2\nu_1^2}\frac{1}{G_{13}^2}a^2-\frac{2\nu_2(E_1-G_{12}\nu_1)}{k\nu_1}\frac{1}{G_{13}}a^2\biggr)\frac{\partial^8}{\partial\alpha^6\partial\beta^2}+\\
&+\biggl(\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{8E_1^2\nu_2+E_1G_{12}\left[\nu_1\nu_2\left(32+a^2\right)-2\left(12+a^2\right)\right]-2G_{12}^2\nu_1(1-\nu_1\nu_2)\left(16+a^2\right)}{E_1G_{12}}+\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\frac{E_1G_{12}}{k^2G_{13}^2}a^2-\\
&-2\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{G_{12}^2\nu_1-3E_1G_{12}\nu_1\nu_2+2G_{12}^2\nu_1^2\nu_2+E_1^2\nu_2}{k\nu_1G_{12}}\frac{1}{G_{13}}a^2\biggr)\frac{\partial^8}{\partial\alpha^4\partial\beta^4}+\\
&+\left(\frac{\nu_2}{\nu_1^2}\frac{G_{12}^2\nu_1(1-\nu_1\nu_2)\left(16+a^2\right)+4E_1^2\nu_2}{E_1G_{12}}-2\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\frac{2E_1-3G_{12}\nu_1}{k}\frac{1}{G_{13}}a^2\right)\frac{\partial^8}{\partial\alpha^2\partial\beta^6}+\\
&+\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\left(4-2\frac{G_{12}}{k}\frac{1}{G_{13}}a^2\right)\frac{\partial^8}{\partial\beta^8}-\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{E_1\left(4+a^2\right)+4G_{12}(1-\nu_1\nu_2)}{k}\frac{1}{G_{13}}\frac{\partial^6}{\partial\alpha^6}+\\
&+\biggl(8\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{E_1^2\nu_2+E_1G_{12}(2-3\nu_1\nu_2)-2G_{12}^2\nu_1(1-\nu_1\nu_2)}{E_1G_{12}}-\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{4G_{12}\nu_1(1-\nu_1\nu_2)+4E_1\nu_2}{k\nu_1G_{13}}-\\
&-\frac{\nu_2}{\nu_1^2}\frac{E_1^2\nu_2-2E_1G_{12}\nu_1\nu_2+G_{12}^2\nu_1}{kG_{12}}\frac{1}{G_{13}}a^2\biggr)\frac{\partial^6}{\partial\alpha^4\partial\beta^2}+\biggl(8\frac{\nu_2}{\nu_1}\frac{2G_{12}^2\nu_1(1-\nu_1\nu_2)+E_1^2\nu_2}{E_1G_{12}\nu_1}-\\
&-2\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\frac{E_1-G_{12}\nu_1}{k}\frac{1}{G_{13}}a^2\biggr)\frac{\partial^6}{\partial\alpha^2\partial\beta^4}+\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\left(8-\frac{G_{12}}{k}\frac{1}{G_{13}}a^2\right)\frac{\partial^6}{\partial\beta^6}+\\
&+16\frac{\nu_2}{\nu_1}(1-\nu_1\nu_2)\frac{1}{a^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+4\frac{\nu_2}{\nu_1}\left(\frac{E_1\nu_2}{G_{12}\nu_1}+\frac{G_{12}}{E_1}(1-\nu_1\nu_2)\right)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+4\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\Biggr\}\Phi=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Коэффициенты этого уравнения являются постоянными величинами и зависят от геометрических и физических параметров оболочки. Если предположить, что решение данного уравнения можно представить в виде разложения функции Ф в тригонометрические ряды при определенных способах закрепления оболочки

$$\Phi(\alpha;\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\Phi_n^{\,1}(\alpha)\cos n\beta + \Phi_n^{\,2}(\alpha)\sin n\beta\right], \qquad (2)$$

то все функции $\Phi_n^{\,i}$ будут удовлетворять одному обыкновенному дифференциальному уравнению десятого порядка с постоянными коэффициентами.

Корни соответствующего ему характеристического уравнения являются функциями коэффициентов, т.е. $\kappa = \kappa\left(\frac{h}{R}, n, \frac{E_1}{G_{13}}, \frac{G_{12}}{G_{13}}, \nu_1, \nu_2\right)$, где ν_1, ν_2 - коэффициенты Пуассона, E_1 - модуль Юнга, G_{12}, G_{13} - модули сдвига. Так как рассматриваемая оболочка является тонкой, отношение $\frac{h}{R} = a$ считается малой величиной. Оценим, каким образом на корни характеристического уравнения оказывают влияние параметры тонкостенности и податливости оболочки на сдвиг. Предположим также, что каждая из величин $n, \frac{E_1}{G_{13}}, \frac{G_{12}}{G_{13}}$ имеет некоторый порядок малого параметра a: $a^{-\mu}, a^{-\chi}, a^{-\chi}$ (будем полагать $\frac{E_1}{G_{13}}, \frac{G_{12}}{G_{13}}$ одного порядка). Умножим также все члены уравнения на a^t. Тогда $\kappa = \kappa\left(a, a^{-\mu}, a^{-\chi}, a^t\right)$. Следовательно, величине κ также можно поставить в соответствие некоторую степень малого параметра a^{-s}.

Приравнивая показатели степеней a во всех членах уравнения, получим несовместные пары уравнений. Это означает, что при любом выборе параметров μ, t, s, χ в уравнении будут слагаемые разного порядка малости.

Комбинации параметров, при которых в уравнении нет отрицательных степеней a, были найдены при помощи пакета символьной математики Maple 11. Каждой из них соответствует упрощенное разрешающее уравнение. В частности, были получены как уравнения, хорошо известные в классической теории изотропных цилиндрических оболочек (при значениях χ=0), так и сдвиговые модели (χ>0).

Проведя анализ полученных из общего напряженно-деформированного состояния частных случаев, можно классифицировать НДС замкнутой ортотропной цилиндрической оболочки по возможности применения теории, погрешности при переходе к упрощенному уравнению, податливости на сдвиг, степени изменяемости в окружном и продольном направлениях (результаты представлены в Таблице 1).

Табл. 1.

Набор параметров	Погрешность при переходе от общего уравнения	$\frac{E_1}{G_{13}}$	n	Вид НДС
1	2	3	4	5
$\mu = 0, \chi = 0,$ $s = -\frac{1}{2}, t = 0$	$O(a)$	$O(1)$	$O(1)$	Обобщенное основное напряженное состояние
$\mu = 0, \chi = 0,$ $s = \frac{1}{2}, t = 4$	$O(a)$	$O(1)$	$O(1)$	Краевой эффект
$\mu = \frac{1}{2}, \chi = 0,$ $s = \frac{1}{2}, t = 4$	$O(a)$	$O(1)$	$O\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)$	Напряженное состояние с большой изменяемостью
$\mu = 0, \chi = 1,$ $s = -\frac{1}{2}, t = 0$	$O(a)$	$O\left(a^{-1}\right)$	$O(1)$	Обобщенное основное напряженное состояние

$\mu=\frac{1}{2}, \chi=\frac{1}{2}, s=\frac{1}{2}, t=4$	$O(a)$	$O\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)$	$O\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)$	Напряженное состояние с большой изменяемостью
$\mu=0, \chi=2, s=-\frac{1}{2}, t=0$	$O(a)$	$O(a^{-2})$	$O(1)$	Обобщенное основное напряженное состояние
$\mu=0, \chi=2, s=0, t=2$	$O(a^2)$	$O(a^{-2})$	$O(1)$	Основное напряженное состояние
$\mu=0, \chi=1, s=\frac{1}{2}, t=4$	$O(a)$	$O(a^{-1})$	$O(1)$	Краевой эффект
$0<\mu<\frac{1}{2}, s=-\frac{1}{2}+2\mu, t=8\mu, \chi=2-2\mu$	$O(a^{2\mu}), 0<\mu<\frac{1}{4}$ $O(a^{1-2\mu}), \frac{1}{4}<\mu<\frac{1}{2}$	$O(a^{2\mu-2})$	$\left(O(1); O\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$	Обобщенное основное напряженное состояние (упрощенная теория)
$0<\mu<\frac{1}{2}, s=\mu, t=2+4\mu, \chi=2-2\mu$	$O(a^{2-4\mu})$	$O(a^{2\mu-2})$	$\left(O(1); O\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$	Основное напряженное состояние
$\mu=\frac{1}{2}, \chi=1, s=\frac{1}{2}, t=4$	$O(a)$	$O(a^{-1})$	$O\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)$	Напряженное состояние с большой изменяемостью
$\mu>\frac{1}{2}, s=\mu, \chi=2-2\mu, t=8\mu$	$O(a^{4\mu-2})$, $\frac{1}{2}<\mu<1$ $O(a^{2\mu}), \mu>1$	$O(a^{2\mu-2})$	$\left(O\left(a^{-\frac{1}{2}}\right);+\infty\right)$	Напряженное состояние с большой изменяемостью (упрощенная теория)
$\mu>\frac{1}{2}, s=\mu, \chi=2\mu, t=12\mu-2$	$O(a^{8\mu-4})$	$O(a^{-2\mu})$	$\left(O\left(a^{-\frac{1}{2}}\right);+\infty\right)$	Напряженное состояние с большой изменяемостью (упрощенная теория)

Аналогичное исследование проведено и для незамкнутых в окружном направлении оболочек.

Таким образом, в результате применения пакетов символьной математики расширяется круг задач механики, решение которых в аналитическом виде представляет сложную задачу.

Список использованной литературы

1. **Агаловян Л. А.** Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. - М.: Наука: Физматлит, 1997. - 414 с.
2. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, 1979. - 512 с.
3. **Дьяконов В. П.** Математическая система Maple V R3/ R4/ R5. - М.: «Солон», 1998. – 400 с.
4. **Пелех Б. Л.** Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. - Киев: Наукова Думка, 1973. - 248 с.
5. **Хома И. Ю.** Обобщенная теория анизотропных оболочек. - Киев: Наукова Думка, 1986. - 172 с.