

Петрова Д. В.

ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ ЛОБАЧЕВСКОГО. ДЕФЕКТ МАСС И ДЕФЕКТ УГЛОВ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2008/1/66.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2008. № 1 (8). С. 159-164. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

продумать систему организации и протоколирования проектных встреч, согласования документов, принятия результатов, обучение пользователей и т.п.

ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ ЛОБАЧЕВСКОГО. ДЕФЕКТ МАСС И ДЕФЕКТ УГЛОВ

Петрова Д. В.
РГПУ им. Герцена

Данная статья знакомит студентов с гиперболической геометрией. При этом производится качественное сравнение пространств Лобачевского и Евклида. Разбирается задача о дефекте масс, решение производится в пространстве скоростей.

Геометрия Лобачевского широко применяется в теоретической физике. В частности, открытая модель вселенной Фридмана описывается геометрией Лобачевского. Однако этой теме не уделяется достаточно внимания в учебных заведениях. По этой причине разрабатывается новый курс физики “Неевклидова геометрия и её применение в физике”, который уже был успешно опробован со студентами 5 года обучения факультета физики. Этот курс будет освещен в ряде статей, эта статья является второй. Учащимся интересно проводить параллели между геометриями Лобачевского и Евклида, поэтому их схожим и различным свойствам уделено особое внимание. Кроме того, при объяснении темы “Неевклидова геометрия” акцент делается на то, чтобы наглядные изображения и несложные примеры облегчали понимание студентов данной темы. В качестве примера применения геометрии Лобачевского решается задача о дефекте масс. Как известно, экспериментальные данные указывают на то, что масса ядра меньше, чем суммарная масса составляющих его протонов и нейтронов. Эта разность и называется дефектом масс. Для решения задачи вначале познакомимся непосредственно с геометрией Лобачевского.

Предлагаем посмотреть на Рисунок 1. Три пространственные координаты - x , y , z изображены на осях пространства, четвёртая координата - время. Событие происходит в начале координат. Таким образом, ось “- время” - прошлое, а ось “+время” - будущее.

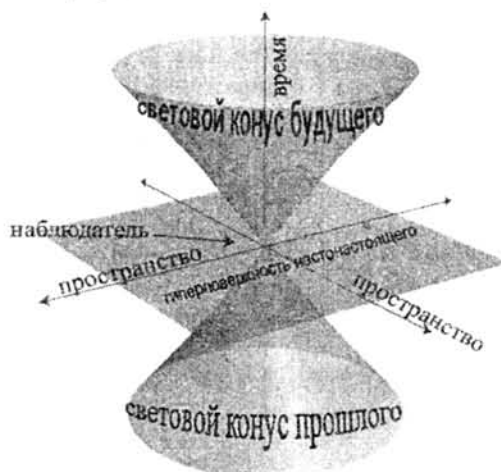


Рис. 1.

Частица, которая движется со скоростью света, изображается как линия с угловым коэффициентом (угловой коэффициент - число k в уравнении прямой линии на плоскости $y = kx + b$, характеризующее наклон прямой относительно оси абсцисс) равным скорости света. Для удобства скорость света принимают равной единице. Затем, для того, чтобы размерности всех осей совпадали, ось времени обозначают как ct . Эта “мировая линия” очерчивает “световой конус” (см. рис - “диаграмму Минковского”). Любая мировая линия обозначает путь частицы, движущейся с постоянной скоростью. Итак, угловой коэффициент любой линии обозначает скорость в единицах скорости света c . Так, частицы, движущиеся со скоростью $v > c$, будут иметь мировые линии, лежащие снаружи светового конуса. Линии, лежащие внутри, на границе и снаружи светового конуса, называются “времениподобными”, “светоподобными” или “пространственноподобными”. Как можно научиться определять, какой из них является мировая линия? Для этого вспомним, как выглядит привычная для нас теорема Пифагора. Для того чтобы найти ds - длину отрезка AB , спроецируем его на координатные оси x , y , z и получим его длину:

$$ds^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2.$$

Однако в пространстве Минковского изменяется и четвёртая координата - время. В данном случае уравнение преобразовывается до вида:

$$ds^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - c^2(t_A - t_B)^2,$$

где c - скорость света. Видно, что “интервал” ds^2 может не быть положительным [Гриб 2003: 57].

Если $ds^2 < 0$, то его называют времениподобным,

$ds^2 > 0$ называют пространственноподобным, а $ds^2 = 0$ - светоподобным.

Далее рассуждения будут применимы только для времениподобных интервалов.

Итак, выражение $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ представляет собой квадрат четырехмерного "расстояния" между двумя точками. Оно инвариантно, т.е. неизменно при любых поворотах и сдвигах. Из этого координатного пространства можно перейти в импульсное пространство, где по осям откладываются импульсы. Для этого нужно формулу $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ продифференцировать по времени, умножить на массу и сделать поправку на релятивистский эффект.

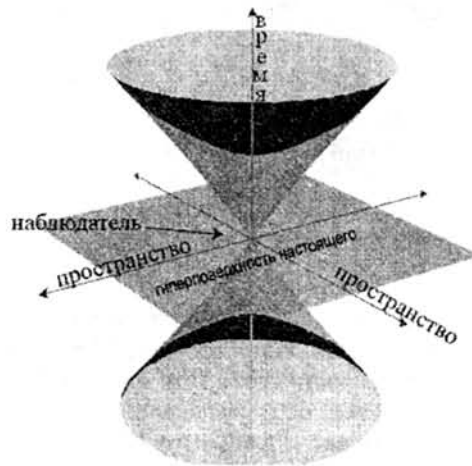
$$m \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = m \left(\frac{dx}{dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + m \left(\frac{dy}{dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + m \left(\frac{dz}{dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 - m \left(\frac{d(ct)}{dt \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2$$

Получаем:

$$P^2 = \left(\frac{mV}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 - \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 = \frac{-m^2 c^2 + m^2 V^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = -m^2 c^2$$

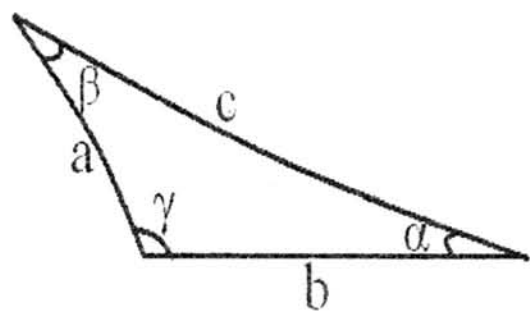
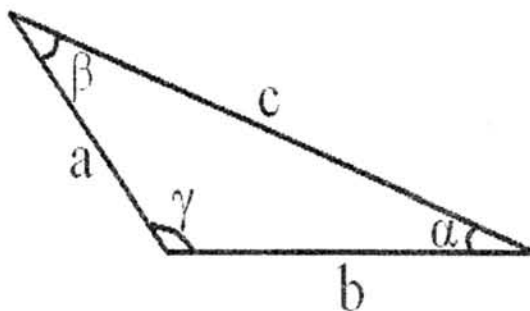
Отсюда видно, что масса - есть квадрат длины четырех вектора энергии-импульса. Возможно, что все точки импульса будут лежать на поверхности двуполостного гиперboloида. Если массу положить равной единице, мы перейдем в гиперболическое пространство скоростей. Если вообразить сферу на диаграмме Минковского, то под ней окажется такой гиперboloид (см. Рис. 2). На гиперboloиде справедлива гиперболическая геометрия. Эта геометрия пространства с отрицательной кривизной. Оно также называется пространством Лобачевского. В этом пространстве скорости частиц обозначаются точками. Здесь справедлив закон сложения скоростей. На плоскости Лобачевского (отрицательная кривизна) и на евклидовой плоскости (нулевая кривизна) действуют очень похожие формулы.

Рис 2.



Выпишем те и другие функции параллельно, слева - для тригонометрических функций ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$) и евклидовых треугольников, справа - для гиперболических функций ($\sinh$, $\cosh$, $\tanh$) и "треугольников Лобачевского" [Дубровский 1984: 102,103].

Тригонометрические функции	Гиперболические функции
Определения:	
$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$	$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$	$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
$(i = \sqrt{-1} - \text{так называемая "мнимая единица"})$	
Поведение при малых аргументах:	
$\sin x \approx x$	$\operatorname{sh} x \approx x$
$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$
$\operatorname{tg} x \approx x$	$\operatorname{th} x \approx x$
Тригонометрия произвольного треугольника:	



Первая теорема косинусов:

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$	$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \gamma$
--	---

Вторая теорема косинусов:

$\cos \gamma = -\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos c$	$\cos \gamma = -\cos a \cos b + \sin a \sin b \operatorname{ch} c$
---	--

Теорема синусов:

$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$	$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma}$
---	--

Графики гиперболических синуса, косинуса и тангенса:

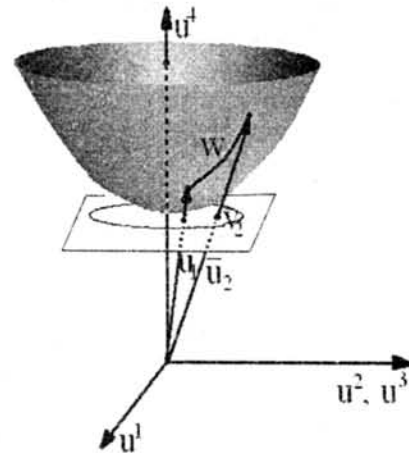
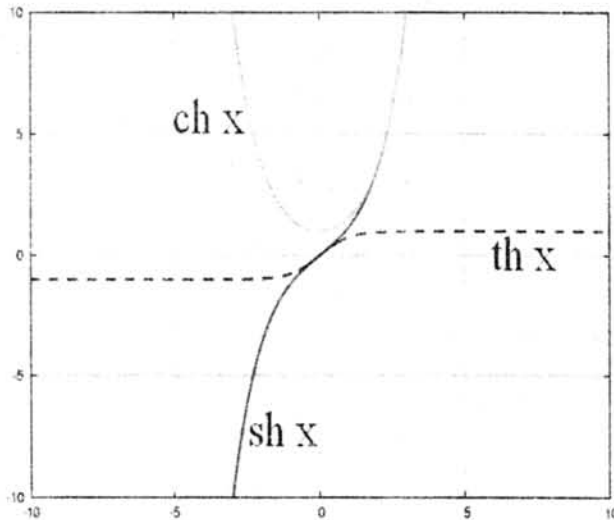


Рис. 3. В пространстве Лобачевского быстрота есть расстояние между двумя точками (скоростями)

Интересно, что функция гиперболического тангенса ($\text{th } x$) приближается к $+\infty$ и $-\infty$ в интервале от $+1$ до -1 . Эта функция служит для определения очень важного понятия в геометрии Лобачевского - быстроты. Дело в том, что в релятивистской физике удобно пользоваться не скоростью, которая может лежать только в интервале от $+c$ до $-c$, а быстротой (w) (см. Рис. 3).

Скорость в пространстве скоростей - это определённая точка, а быстрота определяет расстояние между точками.

Поясним это понятие. Как было сказано выше, геометрия Лобачевского - геометрия на двуполостном гиперболоиде. В данном случае гиперболоид - множество точек, являющиеся концами векторов всех скоростей $\bar{u}$, которые исходят из начала координат в пространстве Минковского. Каждый вектор $\bar{u}$ имеет 4 проекции:

$$u^1 = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, u^2 = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$u^3 = \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, u^4 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

v_x, v_y, v_z - трехмерные скорости - проекции точек, из которых состоит гиперболоид, на плоскость, проходящую через самую нижнюю его точку. Как видно, трехмерная скорость не может лежать вне окружности на плоскости. Непосредственно сам четырех вектор имеет вид:

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - (u^4)^2 = -(c)^2$$

Это уравнение - уравнение двуполостного гиперболоида в четырехмерном пространстве Минковского. Значит, пространство скоростей и есть пространство Лобачевского!

Компоненты трехмерной скорости и компоненты четырехмерной скорости связаны между собой следующим образом [Бабурова 2004: 81]:

$$\frac{v_x}{c} = \frac{u^1}{u^4}, \frac{v_y}{c} = \frac{u^2}{u^4}, \frac{v_z}{c} = \frac{u^3}{u^4}$$

Быстрота же связана со скоростью подстановкой Бельтрами (определение быстроты):

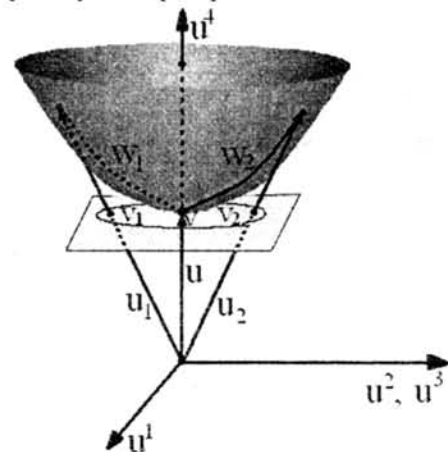
$$\frac{v}{c} = \text{th} \frac{w}{c},$$

где w - быстрота;

c - скорость света;

th - гиперболический тангенс;

v - проекция четырехмерной скорости.



Теперь известно достаточно, чтобы решить задачу о дефекте масс. Пусть частица массой m_3 распалась на две - частицу массой m_1 и частицу массой m_2 (см. Рис.) Пусть нам удалось определить массы этих частиц (m_1, m_2) и их скорости (v_1, v_2). Найти дефект масс, т.е. величину: $\Delta = m_3 - (m_1 + m_2)$. Посмотрите на рисунок: на гиперboloиде лежат концы векторов четырех скоростей этих частиц (u_1, u_2, u). Гиперboloид спроецирован на плоскость, где отмечены трехмерные скорости этих частиц (v_1, v_2, v). Расстояние между четырех скоростями (u_1 и u_2) - быстрота (w_1 и w_2) [Черников 1997: 15, 16].

Для решения этой задачи вспомним формулу для определения пространственной компоненты релятивистского импульса $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Подставим в неё формулу быстроты ($\frac{v}{c} = \text{th} \frac{w}{c}$) и получим:

$$p = \frac{m \cdot c \cdot \text{th} \frac{w}{c}}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \frac{w}{c}}} = m \cdot c \cdot \text{sh} \frac{w}{c}$$

Отметим, что в неевклидовой плоскости, так же как и в евклидовой, окружность определяется как геометрическое место точек, находящихся на расстоянии r от заданной точки, называемой центром окружности. Поэтому общая формула для длины окружности радиуса r на плоскости Лобачевского выглядит так [Винберг 1996: 106]:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot \text{sh} r,$$

где O - длина окружности,

r - радиус этой окружности.

Мы будем рассматривать плоскость, на которую спроецирован гиперboloид, и на ней три окружности с радиусами: 1. - vv_2 , 2. - vv_1 , 3. - v_1v_2 .

Из двух предыдущих формул получаем: $p = m \cdot c \cdot \frac{O}{2\pi}$.

В силу того, что в системе отсчета, где покоится распавшаяся частица, импульсы образовавшихся частиц равны по модулю и противоположны по направлению, справедливо выражение:

$$p_1 = p_2 \text{ (по модулю), или}$$

$$\frac{O(vv_1)}{m_2} = \frac{O(vv_2)}{m_1} = \frac{O(v_1v_2)}{m_3},$$

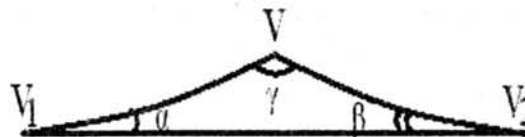
где O - длина окружности с радиусами vv_1, vv_2 и v_1v_2 .

Итак, на плоскости можно провести окружности радиусом vv_1, vv_2 и v_1v_2 . Длины этих окружностей относятся друг к другу как массы m_1 к m_2 к m_3 .

Теперь предположим, что скорости являются вершинами треугольника Лобачевского в предельном случае:

Из теоремы синусов следует:

$$\frac{O(vv_2)}{\sin \alpha} = \frac{O(vv_1)}{\sin \beta} = \frac{O(v_1v_2)}{\sin \gamma}$$



В данном треугольнике углы α и β малы, а $\gamma \approx \pi$. При этом углы: $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \beta \approx \beta$, $\sin \gamma \approx \pi - \gamma$.

Отсюда и из двух предыдущих выражений получаем:

$$\alpha = \lambda \cdot m_1, \gamma = \lambda \cdot m_2, \pi - \gamma = \lambda \cdot m_3, \text{ где } \lambda - \text{малый параметр.}$$

Теперь вспомним формулы:

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2, \cos \beta \approx 1 - \frac{1}{2} \beta^2, \cos \gamma \approx -1 + \frac{1}{2} (\pi - \gamma)^2$$

и применим вторую теорему косинусов $\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \text{ch } c$:

$$-1 + \frac{1}{2} (\pi - \gamma)^2 = -\left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2\right) \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2\right) + \alpha \beta \text{ch}(v_1v_2)$$

$$-1 + \frac{1}{2}(\lambda \cdot m_3)^2 = -\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \cdot m_1^2\right)\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2 m_2^2\right) + \lambda \cdot m_1 \lambda m_2 \operatorname{ch} \frac{w}{c}$$

$$-1 + \frac{1}{2}(\lambda \cdot m_3)^2 = -1 + \frac{1}{2}\lambda^2 \cdot m_2^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 m_1^2 - \frac{1}{4}\lambda^4 \cdot m_1 \cdot m_2 + \lambda^2 \cdot m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{w}{c}$$

Оставляем только члены второго порядка малости:

$$m_3^2 = m_2^2 + m_1^2 + 2 \cdot m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{w}{c}$$

Дефект масс равен:

$$\Delta = (m_2^2 + m_1^2 + 2 \cdot m_1 m_2 \operatorname{ch} \frac{w}{c})^{1/2} - (m_1 + m_2)$$

Пример: дефект масс ядра гелия составляет $\Delta = 4,0330 - 4,0026 = 0,0304$ а.е.м.

Интересно, что в геометрии Лобачевского существует так называемый дефект угла: $\Delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma$. Здесь сумма углов меньше 180° .

В евклидовом треугольнике нет дефекта углов, так как $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, соответственно, нет и дефекта масс в нерелятивистской механике.

Как видно, есть задачи, которые нельзя решить с позиции евклидовой геометрии. Интересно открывать необычные пространства, которые тают в себе разгадки многих явлений природы.

Список использованной литературы

1. Гриб А. Концепции современного естествознания. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. - 311 с.
2. Бабурова О. В. Релятивистская кинематика и геометрия Лобачевского // Соросовский образовательный журнал. 2004.
3. Винберг Э. Б. О неевклидовой геометрии. - Соросовский образовательный журнал. 1996. - № 8. - С. 104-109.
4. Дубровский В. Н., Смородинский Я. А., Сурков Е. Л. Релятивистский мир. - М.: Наука, 1984. - 176 с.
5. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.
6. Черников Н. А. Геометрия Лобачевского и релятивистская ядерная физика. - Дубна, 1997. - 16 с.
7. Черников Н. А. Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации // Физика элементар. частиц и атом. ядра. 1992. - Т. 23. - Вып. 5. - С. 1156-1191.

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ СИНОПТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Попова Т. М.

Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск

В представленной работе исследуется разрешимость начально-краевой задачи для уравнения синоптических течений с разрывными краевыми условиями в определенных функциональных пространствах в смысле интегрального тождества.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения синоптических течений в области $Q = \Omega \times (0, T)$, с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times (0, T)$ где Ω - выпуклая область, ограниченная отрезком прямой $y = 0$ и гладкой кривой Γ , соединяющей концы отрезка. Необходимо найти функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \gamma \Delta^2 u + R \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x, y), \quad (1)$$

начальным и граничным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, y)|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_1} = 0, \quad \Delta u|_{S \setminus S_1} = 0$$

где n - внешняя нормаль к Γ , $S_1 = \Gamma \times (0, T)$.

Введем необходимые функциональные пространства. Пусть $\tilde{W}_2^2(\Omega)$ есть пространство функций из $W_2^2(\Omega)$, плотным множеством в котором являются гладкие функции равные нулю на $\partial\Omega$ и производная по нормали для которых равна нулю на Γ .