МЕТОДИКА СИНТЕЗА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Щербань И. В., Половинчук Н. Я., Иванов С. В., Титов М. А.
Ростовский военный институт ракетных войск им. главного маршала артиллерии Неделина М. И.

В связи с реализацией в современных системах управления межконтинентальных баллистических ракет методов текущего итерационного наведения является актуальной задача синтеза оптимального управления движением центра масс.

В качестве математической модели движения центра масс БР примем следующую систему уравнений [Иванов 2007: 3]:

$$\dot{\bar{\mathbf{R}}}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{t}), \qquad (1)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{V}}}(\mathbf{t}) = \dot{\bar{\mathbf{W}}}(\mathbf{u},\mathbf{t}) + \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{r}})$$

где $\bar{R}(t)$ - радиус-вектор; $\bar{g}(\bar{r})$ - вектор гравитационного ускорения;

$\dot{\bar{\mathbf{W}}}(\mathbf{u},\mathbf{t})$ - модуль вектора кажущегося ускорения. Далее будем считать, что вектор кажущегося ускорения характеризуется следующей зависимостью:

$$\dot{\bar{\mathbf{W}}}(\bar{\mathbf{u}},\mathbf{t}) = \mathbf{E}_{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\mathbf{W}}(\mathbf{t}), \qquad (2)$$

то есть модуль вектора кажущегося ускорения есть известная функция времени:

$$\dot{\mathbf{W}}(\mathbf{t}) = \frac{|\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{t})|}{\mathbf{m}(\mathbf{t})}, \qquad (3)$$

где $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{t})$ - вектор тяги двигательной установки, $\mathbf{m}(\mathbf{t})$ - текущая масса.

Придание оптимальных свойств движению БР осуществляется выбором ориентации единичного вектора кажущегося ускорения $\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{w}}(\bar{\mathbf{u}})$. В этом случае компонентами вектора *U* будут являться направляющие косинусы вектора тяги. Для рассматриваемой задачи наибольший смысл имеет критерий оптимальности:

$$\min_{u\in U} \mathbf{m}_{\mathrm{T}}(\mathbf{t}) = \min_{u\in U} \int_0^t \dot{\mathbf{m}}_{\mathrm{T}}(\mathbf{t})\mathbf{dt} \qquad (4)$$

где $\mathbf{m}_{\mathrm{T}}(\mathbf{t})$ - расход топлива, $\dot{\mathbf{m}}_{\mathrm{T}}(\mathbf{t})$ - массовый секундный расход, *U* - n - мерный вектор управления.

Физический смысл этого распространенного критерия заключается в возможности расширить район поражаемых объектов одной БР.

При формировании будем учитывать ограничение:

$$\left|\dot{\bar{\mathbf{W}}}(\bar{\mathbf{u}},\mathbf{t})\right| = \left[\sum_{\xi\eta\zeta} \dot{\mathbf{W}}_{\mathbf{i}}^2(\bar{\mathbf{u}},\mathbf{t})\right]^{\frac{1}{2}} \le \dot{\mathbf{W}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{t}), \qquad (5)$$

где $\dot{\bar{W}}(\bar{u},t)$ - вектор кажущегося ускорения, $\dot{W}_\xi, \dot{W}_\eta, W_\zeta$ - его компоненты в инерциальной системе координат; $\dot{\bar{W}}(t)$ - максимальное значение величины кажущегося ускорения.

Учитывая, что массовый секундный расход топлива:

$$\dot{\mathbf{m}}_{\mathrm{T}}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{t})}{\mathbf{V}_{\mathbf{e}}}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{V}_{\mathbf{e}}$ - скорость истечения продуктов сгорания компонентов топлива.

то при известных и стабильных характеристиках $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ и $\mathbf{V}_{\mathbf{e}}$ функционал (4) становится функцией верхнего предела интегрирования и критерием оптимальности становится быстродействие.

$$\mathbf{T}^0 = \min_{u\in U}\left\{\mathbf{T}\left[\mathbf{E}_{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{S}}^*)\right]\right\} \qquad (7)$$

Тогда задача синтеза оптимального управления состоит в нахождении ориентации орта $\mathbf{E}_{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{S}}^*)$.

Движение центра масс БР на активном участке безатмосферного полета, в соответствии с принятой моделью (1) в проекциях на оси инерциальной системы координат $\mathbf{O}\xi\eta\zeta$ будем описывать системой дифференциальных уравнений [Иванов 2007: 3]:

$$\dot{V}_\xi = \dot{W}\cos\vartheta_1\cos\psi - g^*_\xi$$
$$\dot{V}_\eta = \dot{W}\sin\vartheta_1 - g^*_\eta$$
$$\dot{V}_\zeta = -\dot{W}\cos\vartheta_1\sin\psi - g^*_\zeta$$
$$\dot{\xi} = V_\xi$$
$$\dot{\eta} = V\eta$$
$$\dot{\zeta} = V_\zeta \qquad (8)$$

где $g^*_\xi, g^*_\eta, g^*_\zeta$ -проекции усредненного вектора гравитационного ускорения.

На основе необходимого достаточного условия оптимальности

$$\min_{u\in U}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T^0}{\partial x_i}f_i(\bar{x},\bar{u})\right] = -1 \qquad (9)$$

уравнение динамического программирования будет иметь вид:

$$\min_{u\in U}\left[(\dot{W}_\xi - g_\xi)\frac{\partial T^0}{\partial V_\xi} + \left(\dot{W}_\eta - g^*_\eta\right)\frac{\partial T^0}{\partial V\eta} + (\dot{W}_\zeta - g^*_\zeta)\frac{\partial T^0}{\partial V_\zeta} + V_\xi\frac{\partial T^0}{\partial \xi} + V_\eta\frac{\partial T^0}{\partial \eta} + V_\zeta\frac{\partial T^0}{\partial \zeta}\right] = -1 \qquad (10)$$

где T^0 - функция Беллмана, равная наименьшему значению функционала (7). Оптимальным будет являться управление, минимизирующее выражение в квадратных скобках в уравнении (10). Операцию минимизации можно провести с помощью неравенства Коши-Буняковского [Иванов 2007: 2]:

$$\left|\sum_{\xi\eta\zeta}\dot{W}_i\frac{\partial T^0}{\partial V_i}\right| \le \left(\sum_{\xi\eta\zeta}\left|\dot{W}_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\xi\eta\zeta}\left|\frac{\partial T^0}{\partial V_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (11)$$

Применяя неравенство (11) к уравнению (10) найдем минимум по управлению:

$$\min_{u=U}\left|\sum_{\xi\eta\zeta}\dot{W}_i\frac{\partial T^0}{\partial V_i}\right| = -\dot{W}\left[\sum_{\xi\eta\zeta}\left(\frac{\partial T^0}{\partial V_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (12)$$

Подставляя равенство (12) в уравнение (10), получим уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана [Иванов 2007: 1]:

$$V_\xi\frac{\partial T^0}{\partial \xi} + V_\eta\frac{\partial T^0}{\partial \eta} + V_\zeta\frac{\partial T^0}{\partial \zeta} - g^*_\xi\frac{\partial T^0}{\partial V_\xi} - g^*_\eta\frac{\partial T^0}{\partial V_\eta} - g^*_\zeta\frac{\partial T^0}{\partial V_\zeta}$$
$$-\dot{W}\left[\left(\frac{\partial T^0}{\partial V_\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^0}{\partial V_\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial T^0}{\partial V_\zeta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = -1 \qquad (13)$$

которое может быть решено с граничным условием:

$T^0(x_k) = 0,$ при $(x_k) \in \left|S^*\right| = 0$,где $x_k = \{\xi_k, \eta_k, \zeta_k, V_{\xi k}, V_{\eta k}, V_{\zeta k}\}^T$ (14)

Рассмотрим структуру оптимального управления, выражение в квадратных скобках соотношения (10). Для ограничения (5) с учетом (11) и (13) получим:

$$\dot{W}^0_i = -\frac{\partial T^0}{\partial V_i}\dot{W}\left[\sum_{\xi\eta\zeta}\left(\frac{\partial T^0}{\partial V_i}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (15)$$

Итак, как следует из выражения (15), оптимальное управление будет полностью определено, если будут известны в каждый момент времени частные производные $\frac{\partial T^0}{\partial V_i}$. В уравнении (13) сделаем подстановку

$$\frac{\partial T^0}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial T^0}{\partial S}\right)\cdot\left(\frac{\partial S}{\partial X_i}\right).$$

В результате получим:

$$\left\{ V_\xi \frac{\partial S}{\partial \xi} + V_\eta \frac{\partial S}{\partial \eta} + V_\zeta \frac{\partial S}{\partial \zeta} - g_\xi^{\cdot} \frac{\partial S}{\partial V_\xi} - g_\eta^{\cdot} \frac{\partial S}{\partial V_\eta} - g_\zeta^{\cdot} \frac{\partial S}{\partial V_\zeta} - \dot{W} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial V_\xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial V_\eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial V_\zeta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{\partial \Gamma^0}{\partial S} = -1 \qquad (16)$$

Если ориентация вектора $\dot{W}^0$ в инерциальной системе координат $o\xi\eta\zeta$ определяется углами Эйлера, то

$$\dot{\bar{W}}^0 = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\psi \\ \sin\vartheta\cos\psi \\ -\sin\psi \end{vmatrix} \qquad (17)$$

В этом случае компоненты вектора $\dot{W}^0$ будут определяться зависимостями, которые и определяют оптимальную ориентацию вектора тяги.

$$\cos\vartheta\cos\psi = \frac{\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\xi}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\eta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\zeta}\right)^2}}$$

$$\sin\vartheta\cos\psi = \frac{\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\eta}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\eta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\zeta}\right)^2}}$$

$$-\sin\psi = \frac{\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\zeta}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\eta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial S_k}{\partial V_\zeta}\right)^2}}$$

Таким образом, синтезированый оптимальный закон управления ориентацией вектора тяги БР исключает необходимость реализации трудоемкой процедуры решения уравнений в частных производных. Оптимальное управление определяется только структурой оптимального решения.

Список использованной литературы

1. **Брайсон А., Хо Ю-Ши.** Прикладная теория оптимального управления. - М.: Мир, 1972.
2. **Могилевский В. Д.** Наведение баллистических летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1976.
3. **Половинчук Н. Я., Шацкий Н. В., Ардашов А. А.** Исследование характеристик движения и систем управления межконтинентальных баллистических ракет-носителей. - МО РФ, 2003.

ФОРМИРОВАНИЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ СОЗДАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Янина Т. И., Кошкина Г. К.

Кузбасский государственный технический университет

Проблема Высшей школы состоит в повышении качества образования специалистов. Это обусловлено требованиями Федеральное агентства по образованию, государственными стандартами, а так же социальными задачами общества. Молодой специалист должен быть не только высококлассным профессионалом, но и личностью.

Образование состоит их двух взаимодополняющих процессов: учения и воспитания.

Для повышения качества образовательного процесса целесообразно кроме классических форм преподавания использовать компьютерные технологии. Электронные учебные пособия для самостоятельной работы студентов предназначены для того, чтобы студенты научились самостоятельно вычленять проблему, ставить задачу и искать пути ее решения и выбирать оптимальный вариант из полученного набора решений, т.е. сделать знания основаниями всякой деятельности человека.

Данная проблема может быть осмыслена при решении следующих задач:

1. Формирование методологического арсенала.
2. Оценка возможностей методологического подхода.