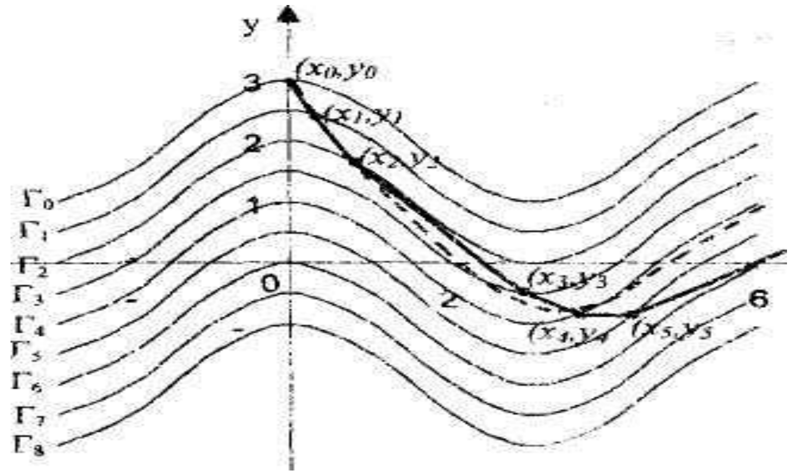

Рис. 3

Точность чертежа может быть, очевидно, увеличена путем увеличения масштаба изображения и числа построенных изоклин и соответствующим им линейных элементов. Однако увеличение масштаба имеет свои границы.

Отметим, что метод изоклин дает наиболее полное представления о таком понятии как поле направлений. Графическое изображение интегральной кривой позволяет делать выводы о свойствах решения дифференциального уравнения.

Метод изоклин является одним из наиболее сложных приближенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и позволяет сформировать у студентов высокий уровень графической и вычислительной культуры. Кроме того, применение метода изоклин позволяет визуализировать процесс решения задачи Коши, таким образом, при его изучении реализуется принцип наглядности в обучении математике.

Список использованной литературы

1. **Асланов Р. М. и др.** Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными: Учеб. пособие. - М.: Изд-во МПГУ, 2003.

2. **Дифференциальные уравнения**: Учебное пособие для студентов-заочников IV курса физ.-мат. фак. / Н. Я. Виленкин, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. - М.: Просвещение, 1984. – 286 с.

3. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнении. — М.: Изд. иностранной литературы, 1954. – 320 с.

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЙ ПОДХОД К НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКЕ

Яхъяева Г. Э.
Новосибирский государственный университет

Введение

Одной из задач математической логики (как классической, так и неклассической) является формализация полученных знаний. Изначально логика была призвана исключить неопределенность, неоднозначность из рассуждений и формализовать только точные знания. Каждый рассматриваемый классической логикой факт или имеет место, или нет. Каждое описываемое свойство является четким, т.е. все объекты либо обладают этим свойством, либо не обладают.

Однако во второй половине XX века в научном сообществе созрело понимания необходимости формализации так же и неточной информации. Один за другим начинают возникать различные направления для формализации неточной информации: нечеткая логика, нейровычисления, генетические вычисления, вероятностные вычисления и др. Позднее все эти направления объединят под общим названием *мягкие вычисления* (Soft Computing).

В данной статье мы рассмотрим одно из этих направлений – нечеткую логику. Годом рождения данного направления считается 1965 год, когда вышла первая статья Лофти Заде [Zadeh 1965: 8].

Основной идеей данного подхода является то, что на вопрос «принадлежит ли объект *a* множеству *A*?» не всегда возможно дать точный ответ «да» или «нет». То есть, отношение принадлежности объекта множеству является «нечетким» и помимо значений «*истинно*» и «*ложно*» может принимать и промежуточные значения.

На сегодняшний день существует два альтернативных способа формализации феномена нечеткости: *функциональные нечеткие логики* и *логики фазификаций булевозначных моделей*.

Целью данной работы является сравнение данных направлений с точки зрения теории моделей.

1. Нечеткие модели

Зафиксируем сигнатуру σ, содержащую предикатные символы и символы констант. Мы подразумеваем, что сигнатура σ не содержит функциональных символов. Это обобщение допустимо, так как любой *n*-местный функциональный символ заменяется *n+1*-местным предикатным символом (см., например, [Мальцев 1970: 1]). Так же зафиксируем множество *A*.

Расширим сигнатуру σ, добавив множество констант $C = \{c_a \mid a \in A\}$. Предполагаем, что $\sigma \cap C = \varnothing$. Введем обозначение для расширенной сигнатуры: $\sigma_A = \sigma \cup C$. Это расширение сигнатуры позволит нам избавиться от означивания свободных переменных и вместо рассмотрения множества всех формул сигнатуры σ рассматривать только множество всех предложений сигнатуры σ_A. Будем обозначать это множество через $S(\sigma_A)$.

Далее в статье мы будем рассматривать только такие алгебраические системы, носителем которых является множество *A*, а сигнатурой – множество σ_A. Эти алгебраические системы отличаются друг от друга только видом и способом задания истинностной функции.

Определение 1. *Рассмотрим отображение* $\mu : S(\sigma_A) \to [0,1]$. *Упорядоченную тройку* $\mathfrak{A} = \langle A, \sigma_A, \mu \rangle$ *будем называть **нечеткой моделью**, а отображение* μ *– истинностной функцией.*

Заметим, что если образом истинностной функции μ является двухэлементное множество *{0, 1}*, то данная модель превращается в модель классической двухзначной логики. Такие модели в дальнейшем будем называть *классическими моделями*.

Очевидно, что именно описание способа задание истинностной функции μ и определяет логику данной модели. На наш взгляд, каждый такой способ должен отвечать следующим двум условиям: (1) классические модели должны попадать под это описание как частный случай; (2) значения истинности сложных предложений должны быть тем или иным способом зависимы от значений истинности атомарных предложений в них входящих.

2. Функциональные нечеткие логики

Для каждой функциональной нечеткой логики (например, [Hajek 1998: 2]) истинностное значение сложного предложения является функцией истинностных значений атомарных предложений ее составляющих. То есть при задании истинностной функции $\mu : S(\sigma_A) \to [0,1]$ должны существовать такие функции $n : [0,1] \to [0,1]$ и $f, g : [0,1]^2 \to [0,1]$, что

$$\mu(\neg\varphi) = n(\mu(\varphi));$$
$$\mu(\varphi \,\&\, \psi) = f(\mu(\varphi), \mu(\psi));$$
$$\mu(\varphi \vee \psi) = g(\mu(\varphi), \mu(\psi)).$$

Исторически первая функциональная нечеткая логика была предложена Л. Заде [Zadeh 1975: 9]. Для операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции он предложил следующие функции:

$$\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi);$$
$$\mu(\varphi \,\&\, \psi) = \min\{\mu(\varphi), \mu(\psi)\};$$
$$\mu(\varphi \vee \psi) = \max\{\mu(\varphi), \mu(\psi)\}.$$

Не трудно проверить, что для этих функций не выполняются законы исключения третьего и противоречия, т.е. $\mu(\varphi \,\&\, \neg\varphi) \neq 0$ и $\mu(\varphi \vee \neg\varphi) \neq 1$. И, следовательно, множество *L=[0, 1]* с данными операциями не образует булеву алгебру.

Позже было доказано [Klir, Yuan 1995: 3], что если предположить, что множество *L=[0, 1]* образует решетку с *inf* (*f*) и *sup* (*g*) и содержит наименьший (*0*) и наибольший (*1*) элементы, то нельзя определить операцию дополнения (*n*) так, чтобы данная решетка образовывала булеву алгебру.

Используя этот факт, мы можем сформулировать необходимое условие для того, чтобы нечеткая модель являлась моделью функциональной логики. Для этого введем следующие обозначения:

$Taf(\sigma_A)$ – множество тождественно истинных предложений сигнатуры σ_A.

$Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mu(\varphi) = 1\}$ – элементарная теория нечеткой модели $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. *Необходимым условием для того, чтобы нечеткая модель* $\mathfrak{A}$ *(не являющаяся классической моделью) была моделью функциональной логики является:* $Taf \setminus Th(\mathfrak{A}) \neq \varnothing$.

Таким образом, если нечеткая модель подчиняется законам той или иной функциональной нечеткой логике, то обязательно существуют такие предложения сигнатуры σ_A, которые тождественно истинны в классической логике и не истинны на данной модели.

Заметим, что классические модели этим свойством не обладают и, в данном случае, являются исключением.

3. Логики фазификаций булевозначных моделей

3.1. Основные определения

Пусть $\mathfrak{B}$ является полной, атомной булевой алгеброй. Через $At(\mathfrak{B})$ обозначим множество атомов данной булевой алгебры и через $At(b)$ обозначим множество атомов, лежащих под элементом b. Тогда

$\mathfrak{B} \equiv \langle \rho(At(\mathfrak{B})), \cup, \cap, -, \varnothing, At(\mathfrak{B}) \rangle$.

Дадим определение булевозначной модели, т.е. модели, в которой значениями истинности предложений являются элементы булевой алгебры $\mathfrak{B}$.

Определение 2 [Palchunov, Yakhyaeva 2006: 4]. *Упорядоченную четверку* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}=<A, \sigma_A, \mathfrak{B}, \tau>$ *назовем* ***булевозначной моделью****, если* $\mathfrak{B}$ *– полная атомная булева алгебра, а* $\tau : S(\sigma_A) \to \mathfrak{B}$ *– истинностная функция, удовлетворяющая следующим условиям:*

a. $\tau(\neg\varphi) = \overline{\tau(\varphi)}$;

b. $\tau(\varphi \vee \psi) = \tau(\varphi) \cup \tau(\psi)$;

c. $\tau(\varphi \& \psi) = \tau(\varphi) \cap \tau(\psi)$;

d. $\tau(\varphi \to \psi) = \overline{\tau(\varphi)} \cup \tau(\psi)$;

e. $\tau(\forall x \varphi(x)) = \bigcap_{a\in A} \tau(\varphi(c_a))$;

f. $\tau(\exists x \varphi(x)) = \bigcup_{a\in A} \tau(\varphi(c_a))$.

Определение 3 [Wang, Klir 1992: 6]. *Отображение* $\nu : \rho(X) \to [0, +\infty)$ *называется* ***нечеткой мерой*** *над множеством X, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

a. $\nu(\varnothing) = 0$;

b. *Для любых* $A, B \in \rho(X)$ *если* $A \subseteq B$*, то* $\nu(A) \le \nu(B)$.

Нечеткая мера называется ***нормализованной****, если* $\nu(X) = 1$.

Определение 4. *Нечеткая модель* $\mathfrak{A}=\langle A, \sigma_A, \mu \rangle$ *называется* ***фазификацией булевозначной модели*** $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}} = \langle A, \sigma_A, \mathfrak{B}, \tau \rangle$ *(и обозначается* $Fuz(\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}})$*), если* $\mu = \tau \circ \nu$*, где* ν *– нормализованная нечеткая мера.*

Очевидно, что при задании различных нечетких мер, мы будем получать различные логики. Таким образом, так же как и в случае функциональных логик, существует бесконечное число различных логик фазификации.

Идея логики фазификаций заключается в следующем. Предполагается, что если мы говорим, что значение истинности предложения φ равно $\alpha \in [0,1]$, мы имеем в виду наличие некоторого вероятностного пространства, в котором отношение числа событий, в которых истинно φ по всем равно α. При этом, если нам известно, что $\mu(\varphi) = 0{,}5$ и $\mu(\psi) = 0{,}5$, то $\mu(\varphi \& \psi)$ может принимать значения от *0* (при $\psi \equiv \neg\varphi$) до *0,5* (при $\psi \equiv \varphi$), а $\mu(\varphi \vee \psi)$ может принимать значения от *0,5* (при $\psi \equiv \varphi$) до *1* (при $\psi \equiv \neg\varphi$).

Таким образом, сначала мы должны "дефазифицировать" наше знание, превратив нечеткую модель в булевозначную модель, а потом снова "фазифицировать", перейдя от булевозначной модели к нечеткой модели.

Очевидно, что логики фазификаций не являются функциональными, так как значения истинности сложных предложений не определяется однозначно по значениям истинности атомарных предложений.

3.2. Свойства истинностных функций

Определение 5. *Пусть* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}_i} = \langle A, \sigma_A, \mathfrak{B}_i, \tau_i \rangle$ *(где* $i \in I$*) – булевозначные модели. Будем считать, что* $\bigcap_{i\in I} At(\mathfrak{B}_i) = \varnothing$ *(возможно после переобозначения). Модель* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}} = \langle A, \sigma_A, \mathfrak{B}, \tau \rangle$ *назовем* ***объединением*** *моделей* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}_i}$*, если:*

a. $At(\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}) = \bigcup_{i\in I} At(\mathfrak{B}_i)$;

b. $\tau(\varphi) = \bigcup_{i\in I} \tau_i(\varphi)$, *для любого* $\varphi \in S(\sigma_A)$.

Введем обозначение: $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}_{\mathfrak{B}_i}$.

Утверждение 1. *Если* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}_i}$ *(где* $i \in I$ *) булевозначные модели, то модель* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_{\mathfrak{B}_i}$ *также является булевозначной.*

Доказательство данного утверждения можно найти в [Palchunov, Yakhyaeva 2006: 4].

Пусть $At(\mathfrak{B})=\{b\}$. Тогда булева алгебра $\mathfrak{B}$ состоит из двух элементов: наименьшего $\varnothing$ и наибольшего $\{b\}$. Следовательно, соответствующая ей булевознаная модель $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ будет изоморфна некой классической модели.

Далее, булевозначные модели, со значениями истинности из одноатомной булевой модели так же будем называть *классическими моделями,* и обозначать $\mathfrak{A}_b$, где b – атом данной булевой алгебры.

Теорема 2. *Каждая булевозначная модель может быть представлена как объединение классических моделей.*

Доказательство. Рассмотрим булевозначную модель $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}} = \langle A, \sigma_A, \mathfrak{B}, \tau \rangle$. Для каждого элемента $b \in At(\mathfrak{B})$ будем строить модель $\mathfrak{A}_b = \langle A, \sigma_A, \mathfrak{B}_b, \tau_b \rangle$ следующим образом: $\tau_b(\varphi)=\{b\} \Leftrightarrow b \in \tau(\varphi)$. Очевидно, что $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{b \in At(B)} \mathfrak{A}_b$.

По аналогии с классической логикой введем понятия предложения, истинного на модели и тождественно истинного.

Определение 6. *Предложение* φ *называется* ***истинным на фазификации*** $\mathfrak{A} = Fuz(\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}})$, *если* $\mu(\varphi)=1$.

Предложение φ *называется* ***тождественно истинным*** *в логике фазификаций, если оно истинно на любой фазификации.*

Из теоремы 2 можно получить

Следствие 1. *Предложение* φ *тождественно истинно в классической логике тогда и только тогда, когда оно тождественно истинно в логике фазификаций.*

Доказательство. $\varphi \in Taf(\sigma_A) \Leftrightarrow \forall \mathfrak{A}_b \ \tau_b(\varphi)=\{b\} \Leftrightarrow \forall \mathfrak{A}_{\mathfrak{B}} \ \tau(\varphi)=At(\mathfrak{B})$.

Из следствия 1 вытекает

Теорема 3. *Необходимым условием для того, чтобы нечеткая модель* $\mathfrak{A}$ *была фазификацией булевозначной модели является:* $Taf \subseteq Th(\mathfrak{A})$.

Так как каждая нечеткая логика характеризуется бесконечным числом истинностных значений предложений, то возникает вопрос: можно ли построить такое предложение, которое принимает одно и тоже значение истинности (не равное 0 и 1) на всех моделях данной логики.

Определение 7. *Пусть* $\alpha \in [0, 1]$. *Значение истинности* α *называется* ***выделенным****, если существует предложение* φ *сигнатуры* σ_A, *принимающее значение истинности* α *на любой фазификации* $\mathfrak{A}$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *В логике фазификаций существует только два выделенных значения истинности: 0 и 1.*

Заключение

Из теорем 1 и 3 легко заметить, что если рассмотреть множество нечетких моделей подчиняющихся законам функциональных нечетких логик и множество нечетких моделей подчиняющихся законам логик фазификаций, то в пересечении этих множеств будут лежать только классические модели.

Таким образом, (по крайней мере, с данной точки зрения) нельзя утверждать, что тот или иной подход лучше формализует окружающую нас действительность. На самом деле эти два подхода предназначены для формализации совершенно разных проявлений феномена нечеткости.

Так функциональные нечеткие логики нашли свое применение в задачах управления и контроля автоматизированными системами (см., например, [Ross 2004: 5]).

Применение же логик фазификаций мы видим в формализации предметных областей [Yakhyaeva 2007: 7]. Если данную предметную область рассматривать как объединение конкретных ситуаций, в которых все события однозначно определены. То каждую такую ситуацию можно рассматривать как некую классическую модель, а всю предметную область – как объединение этих классических моделей, т.е. как булевозначную модель.

Так же хочется отметить, что предложенные формализмы не покрывают всего множества нечетких моделей. То есть существует бесконечное число нечетких моделей, не подчиняющихся ни законам функциональных нечетких логик, ни законам логик фазификаций. Что дает право предположить о существование и других формализмов (ждущих своего открытия), отражающих иные стороны феномена нечеткости.

Список использованной литературы

1. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы. - М.: Наука, 1970. - 392 с.
2. **Hájek P.** Metamathematics of Fuzzy Logic. - Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 308 p.
3. **Klir G. J. and Yuan B.** Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications. - New Jersey: Prentice Hall PTR, 1995.
4. **Palchunov D., Yakhyaeva G.** Interval Fuzzy Algebraic Systems // Mathematical Logic in Asia: Proceedings of the 9-th Asian Logic Conference. - World Scientific Publishers, 2006. Pp. 191-202.
5. **Ross T. J.** Fuzzy Logic with Engineering Applications. - John Wiley and Sons, Ltd., 2004.
6. **Wang Z., Klir G. J.** Fuzzy Measure Theory. - New York: Plenum press, 1992.
7. **Yakhyaeva G.** Boolean-Valued Models for Formal Contexts Representing Network Attacks // Материалы Всероссийской конференции с международным участием «Знания – Онтологии – Теории». - Новосибирск, 2007. – Т. 2. - С. 36-45.
8. **Zadeh L. A.** Fuzzy Sets // Inform. and Control. – 1965. - № 8. - Pp. 338-353.
9. **Zadeh L. A.** Fuzzy Logic and Approximate Reasoning // Synthese. – 1975. - № 30. - Pp. 407-428.