Пыркова О. А.

БИССЕКТРИСА КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ НАВЫКОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2008. № 7 (14). C. 155-162. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/7/

БИССЕКТРИСА КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ НАВЫКОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Пыркова О. А.
ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Этимология: термин **биссектриса** состоит из латинских слов bis- “дважды” и seco- “секу”, “режу”.

Как правило, ни один вступительный экзамен в вуз по математике не обходится без планиметрических задач, т.е. задач по геометрии на плоскости.

Невозможно указать два, три и даже пять методов, освоив которые, абитуриент научился бы решать все геометрические задачи. Они всегда непредсказуемы. В этом сложность геометрических задач, их отличие от большинства школьных алгебраических задач. Но в этом заключается и их прелесть. Каждая геометрическая задача требует индивидуального подхода, определенной доли изобретательности и интуиции. Конечно же, для решения таких задач необходимо твердо знать теоремы школьного курса.

Справочные сведения

Договоримся для краткости записи использовать следующие (общепринятые) обозначения:

а) a, b, c - длины сторон треугольника ABC, лежащие против углов A, B и C соответственно;

б) l_a, l_b, l_c - биссектрисы, проведенные из вершин A, B и C соответственно;

в) m_a, m_b, m_c - медианы, проведенные из вершин A, B и C соответственно;

г) r - радиус окружности, вписанной в треугольник ABC;

д) R - радиус окружности, описанной около треугольника ABC;

е) S - площадь треугольника ABC,

ж) $p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника ABC.

1. ***Теорема синусов***:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad (1)$$

2. ***Теорема косинусов***:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \qquad (2)$$

3. Формула для вычисления ***площади треугольника***:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \qquad (3)$$

Свойство биссектрисы внутреннего и внешнего угла треугольника

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Биссектрисой*** угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит угол пополам.

К доказательству многих теорем можно относиться как к решению соответствующей задачи. Также как может быть несколько различных способов решения планиметрической задачи, так и доказательство теоремы можно провести несколькими способами, каждый из которых соответствует определенному уровню владения теоретическим материалом и навыками решения задач.

О том, что хороший чертеж облегчает решение задачи, известно всем. Нарисованный первоначально чертеж в процессе решения задачи может дополняться новыми линиями. Такие дополнительные построения, вводящие новые углы и новые отрезки, иногда приводят к появлению геометрических фигур, облегчающих решение задачи. А иногда указывают выход из, казалось бы, неразрешимой задачи. Как одну и ту де задачу можно решить несколькими способами, так и для одной и той же теоремы можно привести несколько доказательств. Первое из возможных доказательств нижеприведенной теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника как раз и использует дополнительные построения.

Поскольку одна и та же предметная задача может служить достижению нескольких конкретных целей, и, следовательно, быть компонентом нескольких учебных задач, то представляется разумным привести также второе доказательство, которое использует вычисление площади треугольника. Во-первых, задачи на вычисление площадей различных фигур встречаются на вступительных экзаменах достаточно часто. Попутно отметим, что площади многоугольников обычно вычисляют, разбивая их на треугольники, прямоугольники и другие фигуры, для площадей которых имеются известные формулы. Во-вторых, используя *метод введения неизвестного* (в рассматриваемой задаче - отношение площадей треугольников, на которые биссектриса разбивает исходный треугольник), может случиться так, что одна и та же величина имеет два различных выражения. Приравняв их, получим уравнение, позволяющее решить задачу.

Прием учебной работы, заключающийся в решении одной и той же задачи различными методами, способствует более глубокому усвоению школьниками каждого метода решения задач, а также систематическому повторению учащимися пройденного материала. Третье из приведенных доказательств иллюстрирует возможности использования тригонометрии при решении планиметрических задач, усиливая межпредметные связи.

Обучение решению одной и той же задачи различными методами подготавливает учащихся к переходу на более высокий уровень при решении задач, выбору наиболее эффективного алгоритма решения задачи.

ТЕОРЕМА (***о биссектрисе внутреннего угла треугольника***)**.** Биссектриса угла треугольника делит противолежащую этому углу сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. если AD - биссектриса угла A треугольника ABC (Рис. 1), то $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

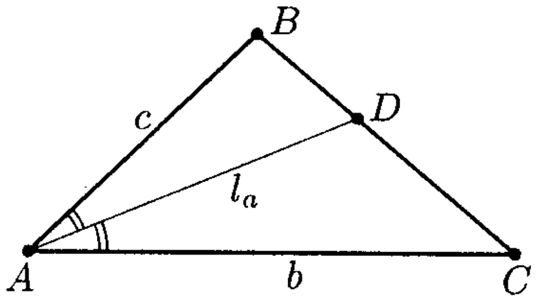

Рис. 1.

<u>Доказательство 1</u> (*использует дополнительные построения*). Проведем через точку C (Рис. 2) прямую параллельную AD, пересекающую продолжение стороны АВ в точке D_1.

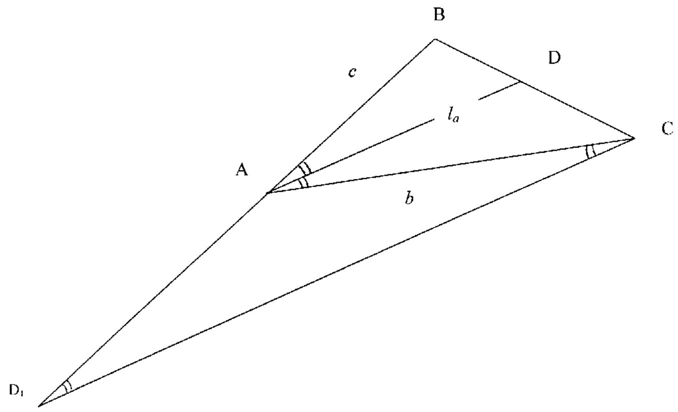

Рис. 2.

Тогда треугольник ABD подобен треугольнику D_1BC, и $\frac{D_1B}{AB}=\frac{BC}{BD}$. Так как $D_1B=D_1A+AB$, а $BC=BD+DC$, то получаем равенство $\frac{D_1A}{AB}+1=1+\frac{DC}{BD}$ или $\frac{D_1A}{AB}=\frac{DC}{BD}$.

Отметим, что это же равенство мгновенно следует из *обобщенной теоремы Фалеса*: параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки (одно из доказательств которой мы только что получили).

Кроме того, имеем цепочку равенств $\angle CD_1A=\angle DAB=\angle DAC=\angle ACD_1$, откуда $D_1A=AC$. Таким образом, $\frac{AC}{AB}=\frac{DC}{BD}$ или $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.☺

<u>Доказательство 2</u> (*использует вычисление площади треугольника*). Имеем с одной стороны $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AB\cdot\sin\frac{A}{2}}{\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AC\cdot\sin\frac{A}{2}}$, с другой стороны $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot DC\cdot h}$, где h - высота треугольника ABC, проведенная из вершины A (Рис. 3).

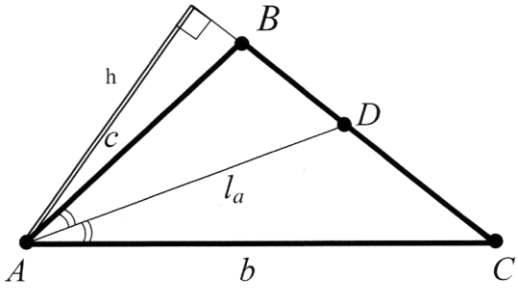

Рис. 3.

Отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.☺

Доказательство 3 (*использует теорему синусов*). Положим $\alpha = \angle BAD = = \angle DAC$, $\varphi = \angle BDA$, тогда $\angle ADC = 180^0 - \varphi$. По теореме синусов из треугольников *ABD* и *ADC* будем иметь:

$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\varphi}$ и $\frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(180^0 - \varphi)}$.

Разделив почленно первое равенство на второе и учитывая, что $\sin(180^0 - \varphi) = \sin\varphi$, получим

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. ☺

Разумеется, список доказательств вышеприведенной теоремы на этом не исчерпывается.

СЛЕДСТВИЕ 1. Биссектриса треугольника делит его на два треугольника, площади которых соответственно пропорциональны прилежащим сторонам треугольника.

Справедливость этого следствия очевидным образом следует из 2-го доказательства теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника.

СВОЙСТВО. Биссектрисы внутреннего и смежного с ним внешнего угла треугольника перпендикулярны.

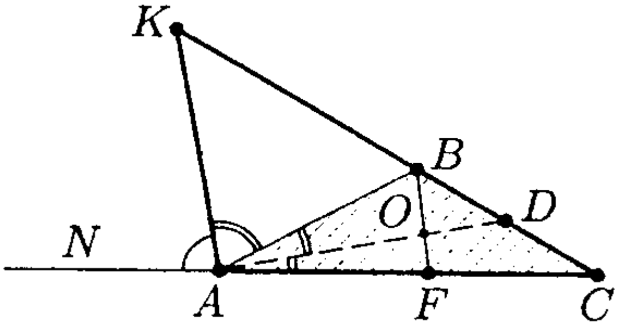

Рис. 4.

Доказательство. Пусть *AD* - биссектриса угла *BAC*, а *AK* - биссектриса смежного с указанным внутренним углом внешнего угла *BAN* треугольника *ABC* (Рис. 4). Тогда если обозначить $\angle CAD = \angle DAB = \alpha$, $\angle BAK = \angle KAN = \beta$, то $2\alpha + 2\beta = 180^0$ и, таким образом, $\alpha + \beta = 90^0$. А это и означает, что $AB \perp AK$.

ТЕОРЕМА (*о биссектрисе внешнего угла треугольника*). Если в треугольнике *ABC* биссектриса внешнего угла при вершине *A* (Рис. 4) пересекает сторону *BC* в точке *K*, то $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения проведем биссектрису *AD* треугольника *ABC* и прямую *BF*, параллельную *AK* $(F \in AC)$ и пересекающую *AD* в точке *O*. Тогда *BF*⊥*AD*, т.к. $AD \perp AK$ (см. свойство) и $BF \parallel AK$, и, следовательно, *AF=AB* (*AO* - биссектриса и высота в треугольнике ABF). Так как $\frac{KB}{KC} = \frac{AF}{AC}$ и *AF=AB*, то $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$.☺

Предоставляем читателям возможность самим подумать над другими доказательствами теоремы о биссектрисе внешнего угла.

Длина биссектрисы треугольника

Часто решение планиметрической задачи заметно упрощается, если известна длина биссектрисы треугольника.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если l_a - биссектриса угла A, то $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ (4)

<u>Доказательство</u>. Для доказательства этой формулы можно воспользоваться формулой для вычисления площади треугольника, если известны две его стороны и угол между ними. Применяя эту формулу к треугольникам ABC, ABD и ADC, получаем: $S_{ABC} = \frac{1}{2}cb\cdot\sin A$, $S_{ABD} = \frac{1}{2}cl_a\cdot\sin\frac{A}{2}$, $S_{ADC} = \frac{1}{2}l_a b\cdot\sin\frac{A}{2}$.

Так как $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$, то, учитывая, что $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$,

получаем $cb\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = cl_a\cdot\sin\frac{A}{2} + l_a b\cdot\sin\frac{A}{2}$.

Откуда следует формула для вычисления биссектрисы через две стороны и угол между ними: $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$. ☺

Развитие логического мышления учащихся, несмотря на недостаточность учебного времени, приобретает все более важное значение, поскольку появилась масса новых профессий, требующих творческого подхода, менее поддающегося алгоритмизации. Возросла потребность в подготовке специалистов, не только обладающих некоторой системой математических знаний, но и умеющих их грамотно применять, причем в новой, заранее неизвестной ситуации, имеющих критичный взгляд, избирательность, инициативу. Поэтому, хотя и приходится немного поднапрячься и проделать более серьезную аналитическую работу, чтобы получить выражение для длины биссектрисы угла треугольника через его стороны, процесс активизации старых знаний и приобретения новых, расширяя кругозор учащихся, вполне окупает затраченные усилия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если даны стороны a, b, c треугольника ABC, то справедливо равенство

$$l_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c} \qquad (5)$$

где l_a - биссектриса угла A.

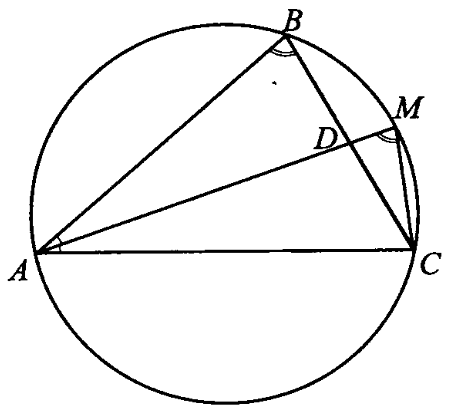

Рис. 5.

<u>Доказательство</u>. Введем дополнительные обозначения: $BD = c'$, $DC = b'$.

Опишем около треугольника ABC окружность и продолжим биссектрису AD до пересечения с окружностью в точке M (Рис. 5). Вписанные углы AMC и ABC опираются на одну и ту же дугу АС и, таким образом, равны. Равны по условию и углы CAM и MAB, поэтому ΔCAM подобен ΔDAB и, значит, $\frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AC}$, то есть $\frac{c}{l_a} = \frac{l_a + DM}{b}$ или $bc = l_a^2 + l_a\cdot DM$.

Но произведение отрезков хорд, проходящих через данную точку D, - величина постоянная (это следует из подобия треугольников ABD и DMC и отношения $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DM}$), поэтому $AD\cdot DM = BD\cdot DC$ или $l_a\cdot DM = c'\cdot b'$. Тогда предыдущее равенство можно переписать в виде

$$bc = l_a^2 + c'\cdot b' \qquad (6)$$

По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ или $\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$. Кроме того, $c'+b'=a$.

Таким образом, получили систему из двух уравнений для двух неизвестных c' и b': $\begin{cases} c'\cdot b=b'\cdot c \\ c'+b'=a \end{cases}$.

Решим ее, например, методом подстановки. Выразим c' из первого уравнения системы через b': $c'=\frac{c}{b}b'$. Подставляя теперь это выражение во второе уравнение системы, получим уравнение уже только для одной переменной b': $\frac{c}{b}b'+b'=a$. Откуда $b'=\frac{a\cdot b}{c+b}$ и, следовательно, $c'=\frac{c}{b}b'=\frac{a\cdot c}{c+b}$.

Тогда $c'\cdot b'=\frac{a^2\cdot b\cdot c}{(c+b)^2}$.

И выражение (6) принимает вид: $bc={l_a}^2+\frac{a^2\cdot bc}{(c+b)^2}$.

Отсюда найдем ${l_a}^2=bc-\frac{a^2\cdot bc}{(c+b)^2}=bc\left(1-\frac{a^2}{(c+b)^2}\right)=bc\left(\frac{(c+b)^2-a^2}{(c+b)^2}\right)=bc\frac{(c+b-a)(c+b+a)}{(c+b)^2}$ и $l_a=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.☺

СЛЕДСТВИЕ 2. Квадрат биссектрисы треугольника равен разности произведения образующих его сторон и произведения отрезков, на которые биссектриса делит третью сторону треугольника.

Доказательство. Из формулы (6), полученной при доказательстве утверждения 2, немедленно следует, что ${l_a}^2=b\cdot c-c'\cdot b'$.☺

Отметим, что формулировка следствия 2 легко запоминается, что немаловажно.

Тот же результат, что и в утверждении 2, можно получить ценой меньших усилий, опираясь на

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если *A*, *B*, *C* - три вершины треугольника *ABC*, а D - любая точка на стороне BC, то имеет место соотношение:

$AD^2\cdot BC=AB^2\cdot CD+AC^2\cdot BD-BC\cdot BD\cdot CD$ (7)

Доказательство. Применим сначала теорему косинусов к треугольнику *ABD*:

$AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos B$,

а затем к треугольнику *ABC*:

$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos B$.

Выразим теперь $\cos B$ из второго соотношения: $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}$. И подставим получившееся равенство в первое соотношение:

$AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cdot\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}$.

Получим

$AD^2\cdot BC=AB^2\cdot BC+BD^2\cdot BC-BD\cdot(AB^2+BC^2-AC^2)$

или

$AD^2\cdot BC=AB^2\cdot(BC-BD)-BD\cdot BC\cdot(BC-BD)+AC^2\cdot BD$.

Так как $BC-BD=CD$, то $AD^2\cdot BC=AB^2\cdot CD+AC^2\cdot BD-BC\cdot BD\cdot CD$. ☺

ПРИМЕР 1. С помощью формулы (7) показать, что $l_a=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

Решение. Придерживаясь стандартных обозначений и учитывая дополнительные (см. доказательство утверждения 2: $BD=c'$, $DC=b'$), перепишем

$AD^2\cdot BC=AB^2\cdot CD+AC^2\cdot BD-BC\cdot BD\cdot CD$

в виде ${l_a}^2\cdot a=c^2\cdot b'+b^2\cdot c'-a\cdot c'\cdot b'$.

В процессе доказательства утверждения 2 было получено, что $b'=\frac{a\cdot b}{c+b}$ и $c'=\frac{a\cdot c}{c+b}$, поэтому

${l_a}^2\cdot a=c^2\cdot\frac{a\cdot b}{c+b}+b^2\cdot\frac{a\cdot c}{c+b}-a\cdot\frac{a\cdot c}{c+b}\cdot\frac{a\cdot b}{c+b}$, или ${l_a}^2=\frac{c^2\cdot b}{c+b}+\frac{b^2\cdot c}{c+b}-\frac{a^2\cdot c\cdot b}{(c+b)^2}$, или ${l_a}^2=\frac{c\cdot b(b+c)}{c+b}-\frac{a^2\cdot c\cdot b}{(c+b)^2}$,

или ${l_a}^2=\frac{c\cdot b}{(c+b)^2}\left((c+b)^2-a^2\right)$, или ${l_a}^2=\frac{c\cdot b}{(c+b)^2}(c+b+a)(c+b-a)$, т.е. $l_a = \dfrac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.☺

Заинтересованным читателям, предоставляется возможность самостоятельно применить результат утверждения 3 для определения длины медианы треугольника.

ЗАДАЧА 1. С помощью формулы (7) показать, что $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.

Проиллюстрируем применение полученных формул для длины биссектрисы и медианы треугольника, на примере решения задачи, предлагавшейся на традиционной весенней олимпиаде школьников в Московском физико-техническом институте, комбинируя такие приемы решения как метод площади треугольника, метод введения неизвестного, теорему косинусов, формулы для длины медианы и биссектрисы, тригонометрические формулы.

ПРИМЕР 2. (МФТИ$_6$ 2008) В треугольнике *ABC* медиана *BM*=3, угол *ABM* равен $\mathrm{arctg}\dfrac{5}{7}$, угол *CBM* равен $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{6}$. Найти стороны *AB*, *BC* и биссектрису *BE* треугольника *ABC*.

<u>Решение</u>. Обозначим угол *ABM* за α, а угол *CBM* за β. Тогда $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{5}{7}$ и $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{1}{6}$. Откуда $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha+1} = \dfrac{49}{74}$ и $\cos^2\beta = \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\beta+1} = \dfrac{36}{37}$, то есть $\sin\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{74}}$ и $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{37}}$.

Так как *BM* - медиана, то *AM*=*MC* - основания треугольников *ABM* и *MBC*, имеющих одну и ту же высоту, равны, поэтому равны и их площади: $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta MBC}$. Учитывая, что $S_{\Delta ABM} = \dfrac{1}{2}AB\cdot BM\sin\alpha$ и $S_{\Delta MBC} = \dfrac{1}{2}BM\cdot BC\sin\beta$, получаем $AB\sin\alpha = BC\sin\beta$.

Полагая $AB = x$, имеем $BC = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}x = \dfrac{5}{\sqrt{2}}x$. Отметим, что полученный результат можно было бы получить с помощью теоремы синусов, примененной к треугольникам *ABM* и *MBC.* Предоставим читателю в качестве упражнения убедиться в этом самостоятельно.

Так как $\cos\angle ABC = \cos(\alpha+\beta)$ = $\dfrac{7}{\sqrt{74}}\dfrac{6}{\sqrt{37}} - \dfrac{5}{\sqrt{74}}\dfrac{1}{\sqrt{37}}$ = $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то по теореме косинусов, примененной к треугольнику ABC, найдем $AC^2 = x^2 + \dfrac{25}{2}x^2 - 2x\cdot\dfrac{5}{\sqrt{2}}x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ = $\dfrac{17}{2}x^2$.

Воспользовавшись результатом задачи 1, получаем $4\cdot BM^2 = 2(AB^2+BC^2)-AC^2$, то есть $36 = 2\left(x^2+\dfrac{25}{2}x^2\right) - \dfrac{17}{2}x^2$ и $x = \sqrt{\dfrac{72}{54-17}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{37}} = AB$. Соответственно $BC = \dfrac{30}{\sqrt{37}}$, $AC = \dfrac{6\sqrt{17}}{\sqrt{37}}$.

Теперь найдем длину биссектрисы $BE = = \dfrac{\sqrt{AB\cdot BC(AB+BC+AC)(AB+BC-AC)}}{AB+BC} =$

$= \dfrac{\sqrt{37}}{6(5+\sqrt{2})}\sqrt{\dfrac{6\sqrt{2}\cdot 30}{37}\cdot\dfrac{36(5+\sqrt{2})^2-36\cdot 17}{37}}$

$= \dfrac{\sqrt{37}}{6(5+\sqrt{2})}\dfrac{6\cdot 6}{37}\sqrt{5\sqrt{2}\cdot(27+10\sqrt{2}-17)}$ $= \dfrac{6}{\sqrt{37}(5+\sqrt{2})}\sqrt{5\sqrt{2}\cdot 10(1+\sqrt{2})}$ $= \dfrac{30\sqrt{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{37}(5+\sqrt{2})\sqrt[4]{2}}$.

<u>Ответ</u>: $AB = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{37}}$, $BC = \dfrac{30}{\sqrt{37}}$, $BC = \dfrac{30\sqrt{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{37}(5+\sqrt{2})\sqrt[4]{2}}$.☺

Формула для длины биссектрисы позволяет в ряде задач получить более компактное решение.

ПРИМЕР 3. Доказать, что если биссектрисы двух внутренних углов некоторого треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

<u>Решение</u>. Пусть это будут биссектрисы углов *A* и *C*: $l_a = l_c$.

Используя результат (5) утверждения 2, получаем:

$l_a = \dfrac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$ и $l_c = \dfrac{\sqrt{ba(c+b+a)(b+a-c)}}{b+a}$.

Если $l_a = l_c$, то справедливо равенство $l_a^2 = l_c^2$, поэтому $\dfrac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} = = \dfrac{ba(c+b+a)(b+a-c)}{(b+a)^2}$, или $\dfrac{c\left((b+c)^2-a^2\right)}{(b+c)^2}=\dfrac{a\left((b+a)^2-c^2\right)}{(b+a)^2}$, или $c-\dfrac{c\cdot a^2}{(b+c)^2}=a-\dfrac{a\cdot c^2}{(b+a)^2}$, или $(c-a)+ac\left(\dfrac{c}{(b+a)^2}-\dfrac{a}{(b+c)^2}\right)=0$, или

$(c-a)+ac\left(\dfrac{c\cdot b^2+c\cdot 2bc+c\cdot c^2-a\cdot b^2-a\cdot 2ba-a\cdot a^2}{(b+a)^2(b+c)^2}\right)=0$, или

$(c-a)+ac\left(\dfrac{(c-a)\cdot b^2+(c^2-a^2)\cdot 2b+(c^3-a^3)}{(b+a)^2(b+c)^2}\right)=0$, или $(c-a)\left[1+ac\left(\dfrac{b^2+(c+a)\cdot 2b+(c^2+ac+a^2)}{(b+a)^2(b+c)^2}\right)\right]=0$.

Так как все переменные в этом выражении суть стороны треугольника, то выражение в квадратных скобках положительно, поэтому $c-a=0$, то есть $c=a$, что и требовалось доказать. ☺

Центр вписанной в треугольник окружности

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Каждая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла. И наоборот, если точка угла равноудалена от его сторон, то она принадлежит биссектрисе данного угла.

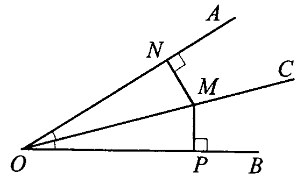

Рис. 6.

<u>Доказательство</u>.

<u>Прямое</u>. Пусть *OC* биссектриса угла *AOB* и точка *M* лежит на биссектрисе (Рис. 6). Опустим из точки *M* перпендикуляры на стороны угла. В прямоугольных треугольниках *NOM* и *MOP* гипотенуза общая, $\angle NOM=\angle MOP$, следовательно, *NM*=*MP*, т.е. точка *M* равноудалена от сторон угла.

<u>Обратное</u>. Пусть точка *M* равноудалена от сторон угла *AOB*. Тогда, если $MN\perp OA$, $MP\perp OB$, то *NM*=*MP*. В прямоугольных треугольниках *NOM* и *MOP* гипотенуза общая, *NM*=*MP*, следовательно $\angle NOM=\angle MOP$, т.е. точка *M* лежит на гипотенузе угла *AOB*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. В любой треугольник можно вписать одну и только одну окружность, ее центром является точка пересечения биссектрис треугольника.

<u>Доказательство</u>. Проведем биссектрисы l_a и l_b треугольника *ABC*. Они пересекутся в некоторой точке *O*, лежащей внутри треугольника (Рис. 7).

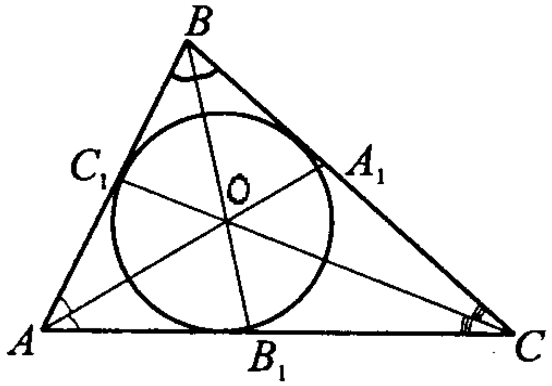

Рис. 7.

Точка *O* как точка биссектрисы l_a равноудалена от сторон треугольника *AB* и *AC*. С другой стороны, точка *O* как точка биссектрисы l_b равноудалена от сторон треугольника *AB* и *BC*, т.е. она равноудалена от трех сторон треугольника, а значит лежит на биссектрисе l_c угла *ACB*.

Таким образом, доказали, что точка *O* - точка пересечения трех биссектрис треугольника.

Поскольку точка *O* равноудалена от всех сторон треугольника *ABC*, то она является центром окружности, вписанной в это треугольник. Так как прямые l_a и l_b пересекаются в одной точке, точка *O* должна лежать на этих прямых, чтобы быть равноудаленной от сторон треугольника, то вписанная в треугольник *ABC* окружность единственная. ☺

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Радиус r вписанной окружности определяется формулой $r = \frac{S}{p}$ (8)
где S - площадь треугольника, p - его полупериметр.

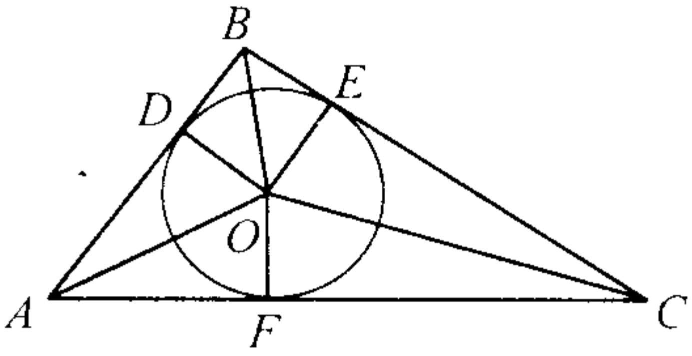

Рис. 9

Доказательство. Пусть O - центр вписанной в треугольник ABC окружности радиуса r, которая касается сторон треугольника $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ в точках D, E и F соответственно.

Так как $OD \perp AB$, $OE \perp BC$, $OF \perp AC$ и $OD=OE=OF=r$, то $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}AB \cdot OD + \frac{1}{2}BC \cdot OE + \frac{1}{2}AC \cdot OF = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{c+a+b}{2}r = p \cdot r$ и, значит, $r = \frac{S}{p}$.☺

В заключение хочется отметить, что, несомненно, потенциал использования различных методов решения задач велик, и правильная организация работы с ними, в зависимости от поставленных целей, поможет приблизить учебный процесс к наиболее эффективным его характеристикам.

Список использованной литературы

1. **Амелькин В. В., Рабцевич В. Л., Тимохович В. Л.** Геометрия на плоскости: теория, задачи, решения. - Мн.: ООО «Асар», 2003. - 592 с.
2. **Лисова М. И., Пирютко О. Н.** Планиметрия. Итоговое повторение. - Мн.: Аверсэв, 2004. - 416 с.
3. **Потапов М. К., Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В.** Готовимся к экзаменам по математике: Учебное пособие для поступающих в вузы и старшеклассников. - М.: Научно-технический центр «Университетский»: АСТ-Пресс, 1997. - 352 с.
4. **Сефибеков С. Р.** Четыре доказательства теоремы о биссектрисе // «Квант» - «Наука». - 1983 - № 8. - С. 37.
5. **Шабунин М. И.** Пособие по математике для поступающих в вузы. - М.: Лаборатория базовых знаний, 1999. – 640 с.

АРХИТЕКТУРА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В КОНТЕКСТЕ МЕТОДИЧЕСКОГО КОНСТРУКТИВИЗМА

Рожкова А. В.
Российский университет дружбы народов

Современная архитектура является скорее искусством, чем строгой наукой по образцу математики и физики. Вместе с тем она содержит в себе составные части, которые являются результатом использования специальных дисциплин. К этим дисциплинам относятся высшая математика, физика, теоретическая механика, строительная механика, сопротивление материалов, материаловедение и ряд других. Составные части архитектуры, о которых идет речь, представляют собой теоретическое и практическое знание, выраженное на языках этих специальных дисциплин. Оно может быть упорядочено единым образом, чтобы избежать повторений, эффекта «порочного круга» и других недостатков, с которыми часто приходится сталкиваться архитектору в его практической деятельности.

Философия, как наука о наиболее общих законах развития человека, природы и общества, предлагает для борьбы с этими дефектами многочисленные системы взглядов и методы работы. Одним из таких философских направлений является «Методический конструктивизм», который является современным течением философской и теоретико-научной мысли в ФРГ. Его отличительными чертами являются:

- акцент на философию языка,
- использование донаучных знаний (протонаук),
- широкое использование логики,
- нормирование раздела науки для получения строгого знания,
- представление о познании, как целенаправленной, разделенной на элементарные акты деятельности людей с помощью инструментов и аппаратов.