ИСЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ГЕОМЕТРИИ

Юрков В. Ю.
Омский государственный педагогический университет

Исчислительная геометрия является разделом геометрии, в котором изучаются алгебраические характеристики множеств геометрических объектов по их формализованному описанию. Основными задачами исчислительной геометрии являются: подсчет параметрических чисел множеств геометрических объектов, параметризация геометрических условий, специализация исходных условий, определение совместности исходных условий, подсчет алгебраических характеристик, определение числа геометрических объектов.

Основной метод исчислительной геометрии - символический. Каждое геометрическое условие, налагаемое на объект, может быть записано в виде символа. Алгебраические действия с принятыми символами позволяют решить задачи исчислительной геометрии [Юрков, 1998].

В каждой исчислительной задаче обязательно имеется множество геометрических объектов - прямых, плоскостей, коник на плоскости, квадрик в пространстве и т.д., имеющее определенную размерность. Кроме этого обязательно имеется определяющая фигура - множество заданных точек, прямых, кривых и т.д., с которыми данные объекты должны иметь заданные отношения. Например, если требуется найти число прямых, пересекающих в трехмерном пространстве четыре заданные прямые, то множество геометрических объектов есть множество прямых трехмерного пространства, определяющая фигура - четыре заданные прямые, а отношения - условия пересечения каждой прямой определяющей фигуры. В задаче: найти число коник на плоскости, проходящих через три заданные точки и касающиеся двух прямых, множество объектов - это пятипараметрическое множество коник плоскости, определяющее множество - три точки и две коники, условия - прохождение через точки и касание заданных коник.

Специальная техника исчислительной геометрии позволяет обойти трудности аналитического решения подобных задач. Эта техника основана на применении двух следующих принципов - принципа специализации определяющего множества и принципа сохранения числа.

Рассмотрим исчисление условий. Пусть имеется некоторое множество Σ геометрических объектов, имеющее размерность m. Напомним, что записи $\dim\Sigma = m$ и ∞^m эквивалентны. Пусть имеется множество условий, с каждым из которых ассоциируется некоторая размерность. Напомним, что условие имеет размерность k (или является k кратным), если, наложенное на Σ, оно уменьшает размерность этого множества объектов на k. Следовательно, все условия, допустимые для данного множества Σ, могут иметь размерность не меньше единицы и не больше m. Формально допустимо существование условий нулевой размерности.

Суммой двух условий одинаковой размерности называется условие того, что Σ должно удовлетворять или одному или другому условию. Суммой конечного числа условий одинаковой размерности называется условие того, что Σ должно удовлетворять хотя бы одному условию суммы.

Произведением конечного числа условий называется условие того, что Σ должно удовлетворять всем условиям, входящим в произведение. При умножении условий их размерности суммируются.

Если условия, входящие в сумму, не только эквивалентны по размерности, но и тождественны, то можно определить умножение условия на целое число. Если же условия, образующие произведение, эквивалентны, то можно определить возведение условия в степень.

Суть метода заключается в формальном представлении условий инцидентности специальными символами и использовании принципа специализации при алгебраических операциях с ними. Ниже мы будем пользоваться символикой В. Я. Волкова [Волков, Юрков, 1990].

В качестве исходного принят символ обобщенного условия инцидентности

$$e^{m,\quad m-1,\quad m-2,\quad \dots,\quad 1,\quad 0}_{a_m,\quad a_{m-1},\quad a_{m-2},\quad \dots,\quad a_1,\quad a_0},$$

где число верхних и нижних индексов одинаково. Значения верхних индексов определяют размерность линейного искомого многообразия и размерности всех его линейных подмногообразий вплоть до точки. Нижние индексы - размерность пространства, с которым искомое многообразие имеет отношение инцидентности, и размерности его подпространств, с которыми имеют отношения инцидентности соответствующие подпространства искомого многообразия. Этот символ можно рассматривать как условие, наложенное на множество $m-$ плоскостей, а можно как многообразие $m-$ плоскостей, определенное этим условием.

Размерность обобщенного условия инцидентности определяется по формуле

$$\dim e = (m+1)(n-m) + \sum_{i=0}^{m} i - \sum_{i=0}^{m} a_i .$$

Рассмотрим ряд примеров.

Если запись e^0_2 рассматривать как условие, то она означает, что в $n-$мерном пространстве на $n-$параметрическое множество точек наложено условие принадлежности заданной плоскости. Размерность условия равна $n-2$. Как многообразие это есть плоскость, т.е. двухпараметрическое множество точек. Запись

$e^{1,\ 0}_{3,\ 1}$ как условие означает, что прямые должны принадлежать заданной 3-плоскости и пересекать заданную в ней прямую, а как многообразие - линейный комплекс прямых. Размерность условия равна $2(n-1)-3$. Запись $e^{1,\ 0}_{2,\ 1}$ как условие: прямая должна лежать в заданной плоскости. Размерность равна $2(n-2)$. Как многообразие - плоское поле прямых. $e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 2,\ 0}$ как условие: плоскость должна лежать в заданной 3-плоскости и проходить через заданную в ней точку. Как многообразие - связка плоскостей. Условие, что искомая плоскость должна в заданной 3-плоскости пересекать по прямой заданную 2-плоскость, является нулевым (выполняется безусловно).

Рассмотрим редукцию произведений различных символов. Произведение символов интерпретируется как условие того, что искомый объект должен удовлетворять одновременно всем условиям, входящим в произведение. Размерность произведения условий равна сумме размерностей сомножителей. Например, произведение $e^{1,\ 0}_{3,\ 1}\cdot e^{1,\ 0}_{3,\ 0}$ означает, что одни и те же прямые должны пересекать заданную прямую и проходить через заданную точку. Размерность условия в трехмерном пространстве равна 3. Следовательно, искомое множество прямых является однопараметрическим (4 - 3 = 1), а именно, пучком прямых.

Произведение $e^{1,\ 0}_{2,\ 1}\cdot e^{1,\ 0}_{3,\ 0}$ имеет размерность 4 и формально кажется имеющим смысл, так как должно определять ∞^0 прямых трехмерного пространства. Однако в действительности оно является несовместным, так как выполнить их для одних и тех же прямых нельзя. Действительно, не существует прямых, лежащих в заданной плоскости, и, одновременно, проходящих через заданную точку, так как заданная точка по условию не лежит в заданной плоскости.

Приведем возможные произведения двух условий и редукцию их на сумму условий, эквивалентных по размерности. Выберем сначала все условия для точки: e^{0}_{i}, $i = 0, 1, 2, 3$. Существуют следующие уравнения условий.

$$e^{0}_{2}\cdot e^{0}_{2} = e^{0}_{1},\quad e^{0}_{2}\cdot e^{0}_{1} = e^{0}_{0}.$$

Геометрический смысл первого уравнения в том, что искомая точка должна принадлежать двум плоскостям, но это значит, что она будет принадлежать их прямой пересечения. Смысл второго в том, что искомая точка должна принадлежать заданной плоскости и прямой, не лежащей в этой плоскости, а это значит, что она должна совпадать с точкой их пересечения.

Все остальные произведения будут или несовместными, как например,

$$e^{0}_{2}\cdot e^{0}_{0} = \varnothing,\quad e^{0}_{1}\cdot e^{0}_{1} = \varnothing,$$

или тождественными, как

$$e^{0}_{3}\cdot e^{0}_{2} = e^{0}_{2},\quad e^{0}_{3}\cdot e^{0}_{1} = e^{0}_{1},\quad e^{0}_{3}\cdot e^{0}_{0} = e^{0}_{0}.$$

Все условия для прямой в трехмерном пространстве

$$e^{1,\ 0}_{3,\ 2},\ e^{1,\ 0}_{3,\ 1},\ e^{1,\ 0}_{3,\ 0},\ e^{1,\ 0}_{2,\ 1},\ e^{1,\ 0}_{2,\ 0},\ e^{1,\ 0}_{1,\ 0}$$

дадут следующие парные произведения

$$\left(e^{1,\ 0}_{3,\ 1}\right)^2 = e^{1,\ 0}_{3,\ 0} + e^{1,\ 0}_{2,\ 1},\ e^{1,\ 0}_{3,\ 1}\cdot e^{1,\ 0}_{3,\ 0} = e^{1,\ 0}_{2,\ 0},$$

$$e^{1,\ 0}_{3,\ 1}\cdot e^{1,\ 0}_{2,\ 1} = e^{1,\ 0}_{2,\ 0},\ e^{1,\ 0}_{3,\ 1}\cdot e^{1,\ 0}_{2,\ 0} = e^{1,\ 0}_{1,\ 0},$$

$$\left(e^{1,\ 0}_{3,\ 0}\right)^2 = e^{1,\ 0}_{1,\ 0},\ \left(e^{1,\ 0}_{2,\ 1}\right)^2 = e^{1,\ 0}_{1,\ 0}$$

Все остальные парные произведения будут или несовместными или тождественными.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию первого произведения. Ему будут удовлетворять все прямые, пересекающие две заданные прямые. Многообразие прямых, определяемое этим условием, есть конгруэнция 1-го порядка и 1-го класса. Предположим, что, по принципу специализации, заданные прямые пересекаются. Тогда указанному условию будут удовлетворять все прямые, проходящие через точку пересечения, образующие связку, и все прямые, лежащие в плоскости двух пересекающихся прямых, образующие поле.

Рассматривая условия для плоскости

$$e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 2,\ 1},\ e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 2,\ 0},\ e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 1,\ 0},\ e^{2,\ 1,\ 0}_{2,\ 1,\ 0},$$

получим следующие совместные парные произведения:

$$\left(e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 2,\ 0}\right)^2 = e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 1,\ 0},\ e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 2,\ 0} \cdot e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 1,\ 0} = e^{2,\ 1,\ 0}_{2,\ 1,\ 0}$$

Рассмотрим решение классической задачи, уже не раз упоминаемой в литературе. Найти число прямых, пересекающих в трехмерном пространстве четыре заданные прямые. Расписанное подробно решение имеет вид

$$\left(e^{1,\ 0}_{3,\ 1}\right)^4 = \left(e^{1,\ 0}_{3,\ 0} + e^{1,\ 0}_{2,\ 1}\right)\left(e^{1,\ 0}_{3,\ 1}\right)^2 = 2e^{1,\ 0}_{1,\ 0}$$

В четырехмерном пространстве имеется девять основных условий, кроме нулевого, которые можно наложить на прямую. Все уравнения связей условий можно найти из формулы редукции, построенной опять же на основе принципа специализации

$$\left(e^{1,\ 0}_{4,\ 2}\right)^2 = e^{1,\ 0}_{4,\ 1} + e^{1,\ 0}_{3,\ 2},$$

согласно которому прямая должна пересекать две плоскости. Если одну из плоскостей перемещать так, чтобы она пересекала другую по прямой, то искомое множество прямых распадается на два подмножества: подмножество всех прямых, пресекающих прямую пересечения данных плоскостей и подмножество прямых, лежащих в гиперплоскости, натянутой на данные плоскости.

Используя эту формулу редукции, а также то, что условие пересечения с плоскостью есть одномерное условие, а множество прямых в четырехмерном пространстве является четырехпараметрическим, можно найти число прямых, пересекающих шесть заданных плоскостей. Для этого запишем условия

$$\left(e^{1,\ 0}_{4,\ 2}\right)^6 = \left(e^{1,\ 0}_{4,\ 1} + e^{1,\ 0}_{3,\ 2}\right)^3 = \left(e^{1,\ 0}_{4,\ 1}\right)^3 + 3\left(e^{1,\ 0}_{4,\ 1}\right)^2 e^{1,\ 0}_{3,\ 2} +$$
$$+ 3e^{1,\ 0}_{4,\ 1}\left(e^{1,\ 0}_{3,\ 2}\right)^2 + \left(e^{1,\ 0}_{3,\ 2}\right)^3 = e^{1,\ 0}_{1,\ 0} + 3e^{1,\ 0}_{1,\ 0} + 0 + e^{1,\ 0}_{1,\ 0} = 5e^{1,\ 0}_{1,\ 0}.$$

Или по другому

$$\left(e^{1,\ 0}_{4,\ 2}\right)^6 = \left(e^{1,\ 0}_{4,\ 1} + e^{1,\ 0}_{3,\ 2}\right)\left(e^{1,\ 0}_{4,\ 2}\right)^4 = \left(e^{1,\ 0}_{4,\ 0} + 2e^{1,\ 0}_{3,\ 1}\right)\left(e^{1,\ 0}_{4,\ 2}\right)^3 =$$
$$= \left(3e^{1,\ 0}_{3,\ 0} + 2e^{1,\ 0}_{2,\ 1}\right)\left(e^{1,\ 0}_{4,\ 2}\right)^2 = 5e^{1,\ 0}_{2,\ 0}e^{1,\ 0}_{4,\ 2} = 5e^{1,\ 0}_{1,\ 0}.$$

В четырехмерном пространстве множество прямых и множество плоскостей двойственны. Следовательно, множество основных условий на прямую двойственно множеству основных условий на плоскость. Рассмотренная задача двойственна задаче по определению числа плоскостей, пересекающих шесть заданных прямых. Действительно,

$$\left(e^{2,\ 1,\ 0}_{4,\ 3,\ 1}\right)^6 = \left(e^{2,\ 1,\ 0}_{4,\ 3,\ 0} + e^{2,\ 1,\ 0}_{4,\ 2,\ 1}\right)\left(e^{2,\ 1,\ 0}_{4,\ 3,\ 1}\right)^4 =$$
$$= \left(2e^{2,\ 1,\ 0}_{4,\ 2,\ 0} + e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 2,\ 1}\right)\left(e^{2,\ 1,\ 0}_{4,\ 3,\ 1}\right)^3 = \left(2e^{2,\ 1,\ 0}_{4,\ 1,\ 0} + 3e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 2,\ 0}\right)\left(e^{2,\ 1,\ 0}_{4,\ 3,\ 1}\right)^2 =$$
$$= 5e^{2,\ 1,\ 0}_{3,\ 1,\ 0}e^{2,\ 1,\ 0}_{4,\ 3,\ 1} = 5e^{2,\ 1,\ 0}_{2,\ 1,\ 0}$$

и число таких плоскостей тоже равно пяти.

Рассмотрим построение гиперповерхностей - многомерных аналогов поверхностей Каталана четырехмерного пространства. Допустим, что образующая гиперповерхности есть плоскость. Размерность многообразия плоскостей равна 6. Для образования гиперповерхности необходимо выделить из него одномерное подмногообразие, т.е. наложить на него условия, суммарная размерность которых равна пяти. Так как гиперповерхность является многомерным аналогом поверхностей Каталана, то образующие её плоскости будут параллельны заданной гиперплоскости. Другими словами, плоскости многообразия должны пересекать заданную несобственную плоскость гиперплоскости по прямым. Размерность такого условия равна двум. Отсюда следует, что на шестимерное многообразие плоскостей нужно наложить трёхмерное условие.

Выберем одномерные и двумерные простые условия для плоскости и исследуем получающиеся при этом гиперповерхности. Итак, простые условия

$$e^{2,1,0}_{4,3,1}, e^{2,1,0}_{4,3,0}, e^{2,1,0}_{4,2,1}.$$

Первое условие означает, что из шестимерного многообразия плоскостей выбираются только те плоскости, которые пересекают заданную прямую. Используя это условие, получим искомую гиперповерхность в виде

$$(e^{2,1,0}_{4,3,1})^3 e^{2,1,0}_{4,2,1}$$

Последний сомножитель в этом произведении соответствует условию параллельности заданной гиперплоскости. Для определения порядка полученной гиперповерхности выберем в пространстве прямую и найдём число точек её пересечения с гиперповерхностью:

$$(e^{2,1,0}_{4,3,1})^3 e^{2,1,0}_{4,2,1} e^{2,1,0}_{4,3,1} = 3e^{2,1,0}_{2,1,0}.$$

Итак, порядок гиперповерхности равен трём.

Определим класс гиперповерхности как число гиперплоскостей пучка, которые касаются гиперповерхности. Следует заметить, что если гиперповерхность тангенциально вырожденная развертываемая, то класс её определяется как число гиперплоскостей 0-связки, которые касаются этой гиперповерхности. Если гиперповерхность тангенциально вырожденная неразвертываемая, то класс её определяется как число гиперплоскостей 1-связки, которые касаются гиперповерхности. Для линейчатой гиперповерхности общего вида класс равен числу точек пересечения первых поляр $n-1$ неколлинеарных точек и гиперповерхности. Указанные $n-1$ точки являются носителями пучка гиперплоскостей. Отсюда следует, что максимально возможное значение класса гиперповерхности третьего порядка $(p=3)$ четырехмерного пространства есть $p(p-1)^3 = 24$. А минимально возможный класс гиперповерхности третьего порядка будет равен порядку гиперповерхности.

Определим ранг гиперповерхности. Под рангом будем понимать в общем случае число $(n-i)-$плоскостей в пучке касательных к гиперповерхности, где $2 \le i \le n-1$. Тогда рангом-1 (r^1) будем называть число прямых в пучке, касательных к гиперповерхности, а рангом-2 (r^2) - число плоскостей в пучке, касательных к гиперповерхности. Рангом $-(n-2)$ (r^{n-2}) будем называть число $(n-2)-$плоскостей в пучке, касательных к гиперплоскости. На основании теории поляр получим, что $r^i = p(p-1)^i$. Отсюда для рассматриваемой гиперповерхности $r^1 = 6, r^2 = 12$.

Перебирая выбранные одномерные и двумерные условия

$$e^{2,1,0}_{4,3,1}, e^{2,1,0}_{4,3,0}, e^{2,1,0}_{4,2,1},$$

получим следующие гиперповерхности с двумерной плоской образующей и гиперплоскостью параллелизма. Так условия

$$e^{2,1,0}_{4,3,1} \cdot e^{2,1,0}_{4,2,1}$$

определяют гиперповерхность второго порядка, что следует из исчисления условий

$$e^{2,1,0}_{4,3,1} \cdot e^{2,1,0}_{4,2,1} \cdot e^{2,1,0}_{4,2,1} \cdot e^{2,1,0}_{4,3,1} = 2e^{2,1,0}_{2,1,0}.$$

Последняя из гиперповерхностей, которую можно построить из выбранных условий на основании расчётов, является гиперповерхностью первого порядка или гиперплоскостью

$$e^{2,1,0}_{4,3,0} \cdot e^{2,1,0}_{4,3,1} \cdot e^{2,1,0}_{4,2,1} \cdot e^{2,1,0}_{4,3,1} = e^{2,1,0}_{2,1,0}.$$

Рассмотрим условия распадения гиперповерхности третьего порядка. Если принять, что две заданные прямые пересекаются, то гиперповерхность будет распадаться на гиперповерхность второго порядка и гиперплоскость. Это следует и из формул редукции условий:

$$(e^{2,1,0}_{4,3,1})^3 e^{2,1,0}_{4,2,1} = e^{\cdots}_{4,3,0} e^{\cdots}_{4,3,1} e^{\cdots}_{4,2,1} + e^{\cdots}_{4,2,1} e^{\cdots}_{4,3,1} e^{\cdots}_{4,2,1}$$

Первое слагаемое определяет гиперплоскость, а второе - гиперповерхность второго порядка.

Список использованной литературы

1. **Волков В. Я., Юрков В. Ю.** Шубертовы многообразия, их свойства и применение // Прикладная геометрия и инженерная графика. Киев, 1990. Вып. 50. С. 23-25.

2. **Юрков В. Ю.** Исчисление Шуберта и многозначные соответствия // Омский научный вестник. Омск, 1998. Вып. 2. С. 57-59.