МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, СТРОИТЕЛЬСТВО, АРХИТЕКТУРА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Бабич Владимир Николаевич, Кремлёв Александр Гурьевич, Сиразутдинова Наталья Борисовна
Уральский государственный горный университет

В процессе решения задач горного производства используются методы геометрии, математической статистики и теории вероятностей, анализа и оптимизации, теории игр, алгебры и теории множеств и др. Поэтому специалист горного дела должен получить фундаментальную математическую подготовку. Ценность математического образования состоит в его прикладных возможностях. Понимание возможности применения математических средств для решения реальной задачи (проблемы), умение использовать полученные математические знания в реальной ситуации (при ее исследовании), навыки (устойчивые и целенаправленные) практического применения математических методов - все это характеризует математическую образованность современного специалиста-инженера. Поэтому формированию профессиональной компетентности будущих инженеров способствует именно математическое образование с опорой на компьютерную визуализацию изучаемых объектов, понятий, методов.

Методология математического моделирования в задачах горного производства определяет профессиональную направленность инженерного образования специалистов-горняков. Сложность реальных процессов (физических ситуаций) требует использования упрощенных описаний с помощью различного вида (типа) моделей (словесных, символических, физических и т. д.), которые определенным и подходящим образом абстрагируют выбранные существенные свойства рассматриваемых реальных процессов (физических ситуаций). Математика имеет дело с определением и использованием символических моделей. Именно выделение и возможность формального описания наиболее важных, существенных связей и зависимостей, устойчивых структурных особенностей, тенденций развития, свойственных изучаемому объекту, является важным моментом использования математики при исследовании различных реальных процессов (физических ситуаций). При этом процедура выделения и формализации предполагает высокую степень абстракции, присущую математике. Формализация - способ выражения (фиксации) содержания изучаемого явления через знаковые формы (символы, знаки, термины, буквенные обозначения и др.). Систему таких знаковых форм и правил обращения с ними называют формализмом данной науки. Формализация позволяет производить логические умозаключения (выводы), вычислительные операции, исследования структуры, обращаясь непосредственно со знаковыми формами (с формулами, геометрическими построениями, логическими суждениями), абстрагируясь от конкретного содержания явления.

Математическая модель охватывает класс абстрактных (символических) математических объектов (таких, как числа, векторы и др.) и отношения между этими объектами. Математическое отношение представляет собой гипотетическое правило, связывающее два и более символических объекта. Многие отношения могут быть описаны при помощи математических операций, связывающих одни объекты с другими объектами (множеством объектов), представляющих собой результат операций. Всякая такая абстрактная модель с ее объектами произвольной природы, отношениями и операциями определяется непротиворечивым набором правил (определяющих аксиом), вводящих операции, которыми можно пользоваться, а также устанавливающих общие отношения между их результатами (это аксиоматическое определение математической модели с помощью ее свойств). Конструктивное определение вводит новую математическую модель на основе уже известных математических понятий.

Аксиоматическое определение математической модели требует доказательство существования (непротиворечивость такого определения, а также проверку взаимной независимости определяющих аксиом). При этом должно быть приведено конструктивное построение примера, удовлетворяющего определяющим аксиомам. Математическая модель будет воспроизводить подходящим образом выбранные стороны реального процесса (физической ситуации), если можно установить правила соответствия, связывающие специфические реальные объекты и отношения с определенными математическими объектами и отношениями.

Сформированную математическую модель далее можно исследовать математическими методами, т.е. исследовать как математическую задачу, математическую проблему. При этом математика предоставляет в научном исследовании качественные методы анализа изучаемых явлений и процессов, вычислительный аппарат, развитый формализованный «знаковый» язык.

Одной из основных задач горного производства является определение формы рудного тела на основе построения поверхностей (верхней, нижней) месторождения по данным измерений толщины пласта в точках бурения разведочных скважин. Геометризация формы залегания рудной массы позволяет оценить кубатуру рудного тела (мощность пласта), определить оптимальное место расположения центрального ствола шахты, выбрать рациональные технологии разработки месторождения (планировать горные работы) и др. Математическое моделирование формы рудного тела на основе данных пространственно-геометрических измерений представляет собой аппроксимацию поверхностей (верхней, нижней) физического слоя руды. Существуют различные способы аппроксимации:

- каркасные модели, конструктивными элементами которых являются ребра (в виде кривых, проходящих через узлы) и точки (узлы сети), а соответствующее математическое описание представляет собой набор уравнений кривых (на поверхности), координат точек; аппроксимирующими поверхностями являются плоскости или квадрики;

- полигональные (многогранные) модели, каждая грань которых является простейшим плоским многоугольником, при этом точность аппроксимации требуемой поверхности зависит от числа граней многогранника;

- сплайн-модели, в которых допускается использование поверхностей второго порядка и криволинейных аналитически неописываемых поверхностей, форму которых можно определить с использованием различных методов интерполяции или аппроксимации.

Компьютерная визуализация разрабатываемых геометрических моделей может быть осуществлена с помощью современных САПР, достаточно активно используемых на занятиях по компьютерной графике в рамках учебной дисциплины «Инженерная графика». Как правило, это AutoCAD, КОМПАС, T-FLEX, SolidWorks и др. Получая навыки работы с технологиями 3D-моделирования, создавая твердотельные и поверхностные модели, имея представление о методах параметризации геометрических многообразий, используя теоретико-множественные операции при формировании сложных тел (с добавлением различных технологических и конструктивных элементов типа фасок, сопряжений, отверстий, выемок и др.), студенты тем самым развивают визуальное мышление, столь необходимое инженеру-горняку в его профессиональной деятельности. Использование специализированных автоматизированных средств позволяет осуществлять проектирование на основе гибридного моделирования в диапазоне от проволочной (каркасной) геометрии до технологий параметрического моделирования с использованием твердых тел и сплайн-поверхностей.

Пусть, например, с целью геометрического описания конфигурации (структуры) физического слоя рудной массы были проведены необходимые геологоразведочные работы. Полученные данные пространственно-геометрических измерений (после первичной обработки) сведены в виде табличного массива, где указаны для каждого узла M_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) геодезической сети координаты (x_k, y_k, z_k) точки на верхней поверхности рудного тела, толщина слоя h_k.

Для построения аппроксимации верхней поверхности сначала определяются кривые (с помощью методов интерполяции), лежащие на этой поверхности и проходящие через соответствующие узлы (эти кривые отображают линии сетки), после чего формируют линейчатую поверхность (натянутую на каркас из полученных линий) [Бабич, 2004, с. 112]. Используя значения толщины слоя в узлах, можно построить аппроксимацию нижней поверхности. Точность полученной аппроксимации (как модели формы рудного тела) зависит от густоты сетки и качества выполненных измерений. На Рис. 1 приведены примеры моделей поверхности при разном числе узлов (получены с помощью компьютерного моделирования): n=36, n=441.

Используя методы численного интегрирования, можно вычислить для полученных аппроксимаций поверхностей (т. е. произвести оценивание с некоторой точностью) кубатуру рудного тела.

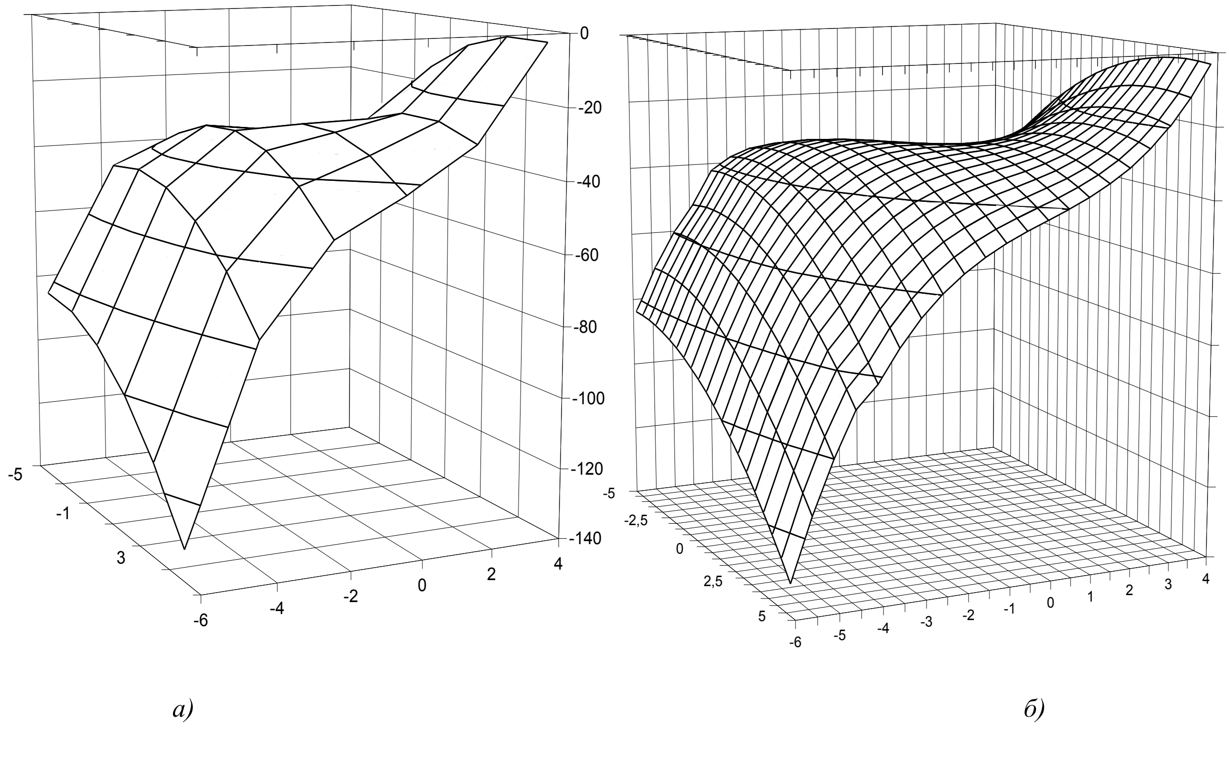

Рис. 1. *Модели поверхности при числе узлов: а) n=36; б) n=441*

Понятия скалярных и векторных функций точки в евклидовом пространстве (соответственно скалярных и векторных полей) позволяют задать математическую модель, элементы которой представляются в виде векторов и для которых определены основные векторные операции (сложение, умножение на скаляр, скалярное произведение и др.). Векторное представление может быть описано (интерпретировано) на геометрическом языке. Используя алгебраические действия с векторами, можно провести аналитическое исследование модели.

Если задано скалярное поле с помощью скалярной функции точки $\Phi(r) \equiv \Phi(x, y, z)$, то геометрическое представление поля определяется поверхностями уровня $\Phi(r) = c$, c=const. Градиент $\nabla\Phi \equiv \mathrm{grad}\ \Phi(r)$ определяет направление наибыстрейшего возрастания функции. Векторные линии поля $\mathrm{grad}\ \Phi$ перпендикулярны к поверхностям уровня (т.е. $\nabla\Phi$ направлен по нормали к поверхности в данной точке). Производная $\Phi(r)$ по направлению l ($\|l\|=1$) определяется как скалярное произведение: $\frac{\partial\Phi(r)}{\partial l} = (\nabla\Phi,\ l)$. На свойствах градиента основаны численные методы оптимизации функций.

Оптимизация и оценивание, как правило, присутствуют в задачах горного производства. Поэтому формирование и исследование оптимизационных моделей является необходимой компонентой решения этих задач. Рассмотрим следующий пример. С трех рудников, расположенных в пунктах M_1, M_2, M_3, добываемая руда должна сначала доставляться на обогатительную фабрику, а затем с фабрики отправляться на завод (расположенный в пункте M_0) для промышленной переработки. На обогатительной фабрике отмывается до γ = 20% посторонних примесей. Требуется определить оптимальное (наиболее рациональное) место для постройки обогатительной фабрики, а именно такое, чтобы транспортные расходы по перевозке руды с этих трех рудников на обогатительную фабрику и с фабрики на завод были минимальными.

Выбрав в качестве начала прямоугольной системы координат Oxy местоположение завода и зная производительность рудников (среднесуточный объем добычи), составим следующую Таблицу 1.

Таблица 1

Пункты расположения рудников	Координаты		Производительность Q_k, т/сут
	x_k	y_k	
M_1	150	180	1800
M_2	240	200	800
M_3	260	90	1200

Пусть в качестве места для постройки обогатительной фабрики выбран пункт M(x,y). Обозначим через d_k расстояние от пункта M_k до пункта M, где $d_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$, k = 0,1,2,3. Суточный объем поступающей с фабрики на завод рудной массы определим как $Q_0 = \gamma \sum_{k=1}^{3} Q_k$. Учитывая коэффициент транспортных расходов μ (руб/т·км), составим следующую математическую модель поставленной задачи.

Найти такие x, y, для которых функция z = f(x, y) принимает наименьшее значение (минимизируется):

$$z = f(x, y) = \mu \sum_{k=0}^{3} Q_k \cdot d_k \to \min,$$

$$f(x,y) = \mu(3040\sqrt{x^2 + y^2} + 1800\sqrt{(x-150)^2 + (y-180)^2} +$$
$$+800\sqrt{(x-240)^2 + (y-200)^2} + 1200\sqrt{(x-260)^2 + (y-90)^2}).$$

Графическое изображение поверхности z = f(x, y) приведено на Рис. 2 (получено с помощью компьютерного моделирования).

Для решения полученной задачи минимизации целевой функции z = f(x,y) на пространстве R^2 используем численный метод, состоящий в процедуре построения последовательности точек $(x_{(0)}, y_{(0)})$, $(x_{(1)}, y_{(1)})$, $(x_{(2)}, y_{(2)})$, …, $(x_{(k)}, y_{(k)})$, …, монотонно уменьшающих значения целевой функции:

$f(x_{(0)}, y_{(0)})) \geq f(x_{(1)}, y_{(1)})) \geq f(x_{(2)}, y_{(2)})) \geq \ldots \geq f(x_{(k)}, y_{(k)})) \geq \ldots$

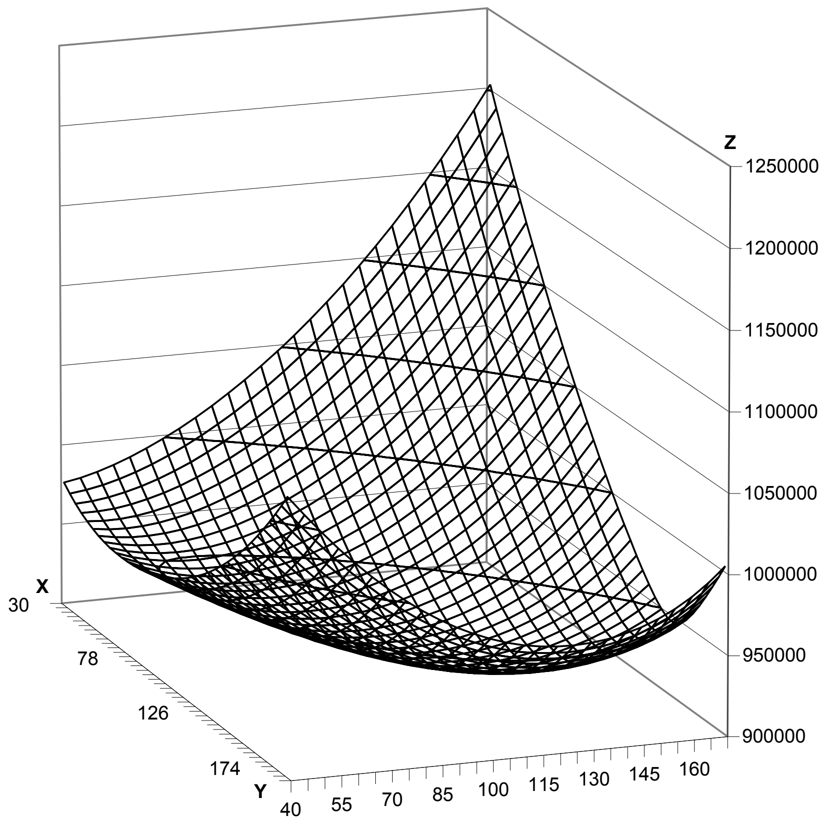

Рис. 2. *Целевая функция z = f(x,y)*

Для вычисления последовательных приближений ($x_{(k)}$, $y_{(k)}$), k = 0,1,2,…, применим метод сопряженных градиентов [Карманов, 1986, с. 190]:

$r_{(k+1)} = r_{(k)} - \beta_k \cdot s_{(k)}$, $k = 0,1,2,\ldots$,

где β_k·определяет длину шага спуска и находится из условия минимума

$\min\limits_{\beta \geq 0} f(r_{(k)} - \beta \cdot s_{(k)}) = f(r_{(k)} - \beta_k \cdot s_{(k)})$,

направление спуска выбирается следующим образом

$s_{(0)} = \nabla f(r_{(0)})$, $s_{(k)} = \nabla f(r_{(k)}) - \alpha_k \cdot s_{(k-1)}$, $k=1,2,\ldots$,

$$\alpha_k := \frac{(\nabla f(r_{(k)}), \nabla f(r_{(k-1)}) - \nabla f(r_{(k)}))}{(\nabla f(r_{(k)}), \nabla f(r_{(k)}))}.$$

Здесь обозначены: r = r(x,y) - радиус-вектор точки M(x, y), z= f(x, y) = f(r), $r_{(k)} = r(x_{(k)}, y_{(k)})$, $\nabla f(r)$ - градиент функции f(x, y) = f(r), вычисленный в точке (x, y),

$$\nabla f(r) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)',$$

штрих означает транспонирование, (r_1, r_2) - скалярное произведение векторов r_1, r_2, причем (r_1, r_2) = $x_1x_2+y_1y_2$.

Выбрав в качестве ($x_{(0)}$, $y_{(0)}$) = (100, 50), получим в результате компьютерных вычислений на 11-той итерации значение ($x_{(11)}$, $y_{(11)}$) = (131.85, 115.0), аппроксимирующее оптимальную точку с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ и доставляющее минимальное значение $z_{min} = f(x_{min}, y_{min})$ = 920063.38. Указанная точка и есть место для постройки обогатительной фабрики.

Автоматизация процессов горного производства достигается компьютеризацией систем управления горнотехническими объектами. Это потребует совершенствования применяемых информационных технологий, технических средств, программного (математического) обеспечения. Использование современных средств выполнения пространственно-геометрических измерений (на всех стадиях производства) при развитой методике их применения позволит формировать соответствующие математические модели с необходимой точностью (подробностью описания реальных объектов). Конструирование достаточно адекватных (точных, надежных) математических моделей объектов горного производства с возможностью их компьютерной обработки позволит оперативно выполнить расчетно-проектные работы, геометризацию месторождений, экономико-математический анализ, информационное сопровождение процессов горных разработок (в т.ч. в режиме мониторинга). Таким образом, развитие и адаптация методов математического моделирования к реальным ситуациям на основе внедрения вычислительной техники, телекоммуникационных средств и цифровых линий связи в сочетании с использованием высокоточных измерительных технологий (включая глобальные навигационные спутниковые системы) определяют эффективность использования математических моделей в процессе решения различных задач горного производства. Понимание методологии математического моделирования в сочетании с визуальным мышлением (геометро-графической визуализацией) и компьютеризацией средств исследования позволит обеспечить формирование профессиональной компетентности инженеров-горняков.

Список использованной литературы

1. **Бабич В. Н.** Геометрическое моделирование многомерных пространств. Теория и приложения. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2004. 224 с.

2. **Карманов В. Г.** Математическое программирование. М.: Наука, 1986. 256 с.

К ВОПРОСУ О ФОРМУЕМОСТИ КЕРАМИЧЕСКИХ МАСС

Горгодзе Георгий Автандилович, Зимакова Галина Александровна
Тюменский государственный архитектурно-строительный университет

Развитие керамической отрасли промышленности строительных материалов идет по пути ресурсосбережения, повышения качества изделий, снижения формовочной влажности. Это позволяет снизить время тепловой обработки изделий, расход топлива на сушку и обжиг, повысить прочность кирпича. Это компенсирует повышение энергозатрат на формование изделий, так как смесь не обладает пластичностью. Внедрение технологии, отвечающей этим параметрам, позволит добиться:

- создание технологических параметров, обеспечивающих повышение однородности бруса по параметрам средней плотности;
- минимизация давления, создаваемого формовочным агрегатом;
- получение геометрии изделия, вписывающейся в поле допустимых ГОСТом отклонений.

Решение этих вопросов связано с использованием дисперсных керамических многокомпонентных масс. Процессы их объемного формования обладают преимуществами по сравнению с остальными:

- пониженная формовочная влажность массы;
- уменьшенная толщина пленок технологической связки;
- минимизированный фактор упругого расширения свежесформованного изделия;
- снижение энергозатрат на тепловую обработку изделий.

Механизм формования сплошного керамического бруса, рассеченного множеством пустот, имеет ряд особенностей. Процесс уплотнения не связан с вибрационным воздействием, а осуществляется за счет одноосного сдвига. При пластическом формовании усилие пресса может распределяться неравномерно по сечению бруса, что приводит к неравномерной плотности и иным дефектам. Полусухое прессование позволяет распределять прессовочное давление по всей грани изделия.

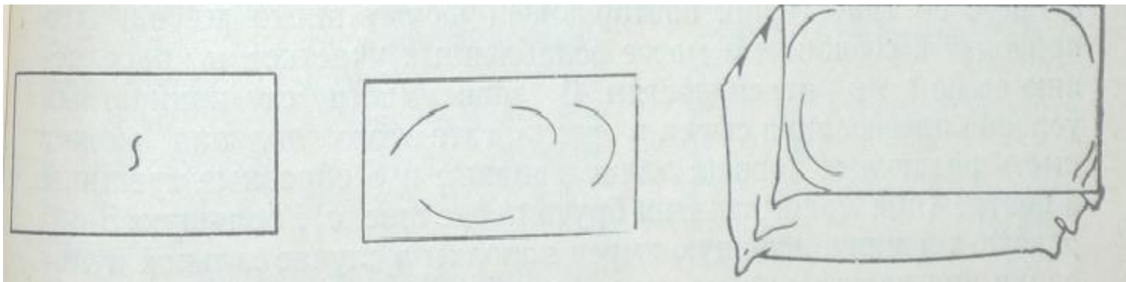

Рис. 1. *S-образная трещина, «свиль», «драконов зуб»*

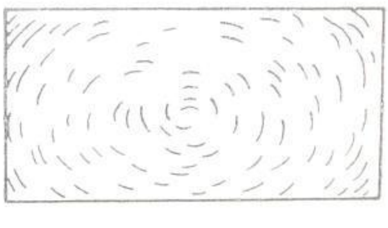

Рис. 2. *Расслоение массы*