невещественное число $\lambda_0$. Пусть $F(\lambda)$ - регулярная не превосходящая по норме единицы операторная функция из $N_{\lambda_0}$ в $N_{\bar{\lambda}_0}$, $L_{F(\lambda)}$ - отношение, состоящее из пар вида $\{y+F(\lambda)z-z, y_1+\lambda_0 F(z)-\bar{\lambda}_0 z\}$, где $\{y, y_1\}\subset L_0$, $z\in R_{\lambda_0}$. Семейство операторов $R_\lambda$ тогда и только тогда будет обобщенной резольвентой отношения $L_0$, когда $R_\lambda$ представимо в виде $R_\lambda=\left(L_{F(\lambda)}-\lambda\right)^{-1}$ $(\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}\lambda_0>0)$.

Установим, что любая обобщенная резольвента $R_\lambda$ отношения $L_0$ является интегральным оператором. При этом среди множества функций, отождествленных в пространстве $L^2(H,A(t);a,b)$ с функцией $R_\lambda f$ $\left(f\in L^2(H,A(t);a,b)\right)$, будем отыскивать такую функцию $y(t)$, что $l[y]$ имеет смысл, при почти всех $t$ $\{l[y]\}(t)\in H_t$ и

$$l[y]-\lambda A(t)y=A(t)y \qquad (3)$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема.** *Всякая обобщенная резольвента отношения $L_0$ является при каждом невещественном $\lambda$ интегральным оператором $R_\lambda f=\int\limits_a^b K(t,s,\lambda)A(s)f(s)ds$ $\left(f\in L^2(H,A(t);a,b)\right)$. Ядро $K(t,s,\lambda)$ имеет вид $K(t,s,\lambda)=W(t,\lambda)\left[M_1(\lambda)-\operatorname{sgn}(s-t)J_n^{-1}(s)/2\right]W^*(s,\bar{\lambda})$, где $M_1(\lambda)=M_0\oplus M(\lambda)$ -операторная функция в $H^n$, представимая в виде ортогональной суммы операторов $M_0$ и $M(\lambda)$.*

*Список использованной литературы*

1. **Коган В. И., Рофе-Бекетов Ф. С.** О квадратично интегрируемых решениях симметрических систем дифференциальных уравнений произвольного порядка. Харьков: Физико-технический ин-т низких температур АН УССР, 1973.
2. **Филиппенко В. И.** Линейные квазидифференциальные операторы в гильбертовом пространстве // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2006. С. 293-344.
3. **Coddington E. A.** Generalized resolutions of the identity for symmetric ordinary differential operators // Annals of Mathematics. 1958. V. 68. № 2. P. 378-392.
4. **Dijksma A., Snoo H. S. V.** Self-adjoint extensions of symmetric subspaces. Pacific J. Math. 1974. № 1. P. 71-100.
5. **Kogan V. I., Rofe-Beketov F. S.** On square-integrable solutions of symmetric systems of differential equations of arbitrary order. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1974-1975. P. 5-40.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (НА ПРИМЕРЕ ПРОЦЕССА НАГРЕВАНИЯ ТОЛСТОЙ СТЕНКИ)

*Ходырева Наталья Геннадиевна*
*Филиал ГОУ ВПО «Московский энергетический институт» в г. Волжском*

Построение и исследование математических моделей важно практически во всех отраслях знаний, но вместе с тем сопряжено с необходимостью использования многих разделов математики, в том числе теории дифференциальных уравнений. Наиболее рациональными и результативными методами решения дифференциальных уравнений являются численные методы.

Рассмотрим решение дифференциального уравнения в частных производных, описывающее процесс нагревания толстой стенки толщиной $L$, к которой с двух сторон подводится тепло, без внутренних тепловыделений.

Пространственное распределение температуры на каждый момент времени можно описать функцией двух переменных $\Theta(x,t)$, где $x$ - координата точки отрезка, $t$ - время в секундах. Пусть для определенности $0<x<1$, $0<t\le T$. Если выделить небольшой участок по ширине пластины длиной $\Delta x$ и рассмотреть изменение энергии за время $\Delta t$, то, учитывая теплоемкость пластины $C$ на единицу длины, приближенное равенство энергии этого участка можно записать следующим образом:

$$E\approx C\cdot\Theta(x,t)\cdot\Delta x.$$

Если принять, что температура всего участка постоянна и равна $\Theta(x,t)$, то чем меньше будет $\Delta x$, тем точнее выполняется это равенство. Данное утверждение является основой многоточечного приближения.

Следовательно, за время $\Delta t$ изменение энергии будет равно:

$$\Delta E=\left(C\cdot\Theta(x,t+\Delta t)-C\cdot\Theta(x,t)\right)\cdot\Delta x.$$

Энергия меняется за счет разности тепловых потоков через концы участков $W\left(x-\frac{\Delta x}{2}, t\right)$ и $W\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t\right)$. Тепловой поток $W(x, t)$ - это количество тепла, проходящее через сечение стержня в точке $x$ за единицу времени в момент $t$. Следовательно,

$$\Delta E=\left(W\left(x-\frac{\Delta x}{2}, t\right)-W\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t\right)\right)\cdot \Delta t .$$

Поток зависит от температуры по закону Фурье

$$W(x, t)=\frac{-k\cdot S\cdot\left(\Theta\left(x-\frac{\Delta x}{2}, t\right)-\Theta\left(x+\frac{\Delta x}{2}, t\right)\right)}{\Delta x},$$

из которого следует, что тепло тем быстрее переходит от горячего тела к холодному, чем больше разница их температур; $k$ в этом выражении - коэффициент теплопроводности. Пусть $\Delta x$ и $\Delta t$ стремятся к нулю. Тогда

$$\Theta_t(x, t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Theta(x, t+\Delta t)-\Theta(x, t)}{\Delta t}$$

есть частная производная температуры по времени;

$$\Theta_x(x, t)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Theta(x+\Delta x, t)-\Theta(x, t)}{\Delta x},$$

$$\Theta_{xx}(x, t)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Theta_x(x+\Delta x, t)-\Theta_x(x, t)}{\Delta x}$$

есть соответственно первая и вторая частные производные температуры по пространству.

Учитывая, что все приведенные выше рассуждения можно отнести к любой точке пластины, можно записать уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}=a\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} \qquad (1)$$

где $a=\frac{\lambda}{C\cdot\rho}$ (м$^2$/с) - коэффициент температуропроводности, $\lambda$ - коэффициент теплопроводности материала, $C$ - удельная теплоемкость пластины, $\rho$ - плотность материала.

Отметим, что в уравнении теплопроводности (1) коэффициент температуропроводности не зависит от температуры $\Theta(x, t)$. Исследуем линейное уравнение с постоянным коэффициентом температуропроводности $a=const$ и в условии отсутствия источников тепла. Начальные и граничные условия задают начальный нагрев центральной области стержня и поддержание постоянной температуры на его краях соответственно.

Для решения уравнения теплопроводности в частных производных можно использовать разностный метод. Суть разностного метода или метода сеток заключается в покрытии расчетной области $(x, t)$ сеткой $n\times m$ точек. Тем самым определяются узлы, в которых будет осуществляться поиск решения. Затем необходимо заменить дифференциальные уравнения в частных производных аппроксимирующими уравнениями в конечных разностях, выписав соответствующие разностные уравнения для каждого $(i, k)$ -го узла сетки.

Введем равномерную сетку по переменной $x$

$$\omega_x=\{x_i=i\Delta x, i=0, 1, 2, \ldots, n; n\Delta x=1\}$$

и по переменной $y$

$$\omega_t=\{t_k=k\Delta t, k=0, 1, 2, \ldots, m; m\Delta t=T\}.$$

Для функции $\Theta(x, t)$, определенной на данной сетке введем обозначение $\Theta_i^k=\Theta(x_i, t_k)$.

Чтобы аппроксимировать уравнение теплопроводности (1) в точке $(x_i, t_k)$ воспользуемся явной разностной схемой, изображенной на Рисунке 1.

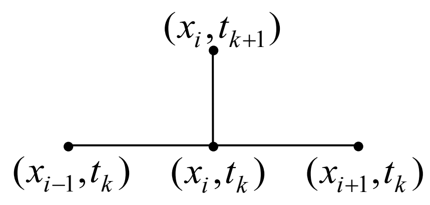


**Рис. 1**

Производную $\frac{\partial\Theta}{\partial t}$ в уравнении заменим разностным отношением

$$\frac{\partial\Theta_i^k}{\partial t}=\frac{\Theta_i^{k+1}-\Theta_i^k}{\Delta t},$$

а производную $\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}$ второй разностной производной

$$\frac{\partial^2\Theta_i^k}{\partial x^2}=\frac{\Theta_{i+1}^k-2\Theta_i^k+\Theta_{i-1}^k}{\Delta x^2}.$$

В результате получим разностное уравнение

$$\frac{\Theta_i^{k+1}-\Theta_i^k}{\Delta t}=a\frac{\Theta_{i+1}^k-2\Theta_i^k+\Theta_{i-1}^k}{\Delta x^2} \qquad (2)$$

которое аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение (1) в точке $(x_i, t_k)$.

Заменим исходное дифференциальное уравнение (1) совокупностью разностных уравнений (2), где $i=1,2,\dots,n-1$, $k=0,1,2,\dots,m-1$. Данные равенства определяют $(n-1)m$ линейных алгебраических уравнений относительно $(n+1)(m+1)$ неизвестных чисел $\Theta_i^k$ (искомых значений функции в узлах сетки). Начальные условия $\Theta_i^0=\Theta_0(x_i)$ $i=0,1,2,\dots,n$ определяют $(n+1)$ равенство. Граничные условия $\Theta_0^k=\mu_1(t_k)$ и $\Theta_n^k=\mu_2(t_k)$ $k=1,2,\dots,m$ дают еще $2m$ уравнений. Сформированная полная система алгебраических уравнений называется разностной явной схемой Эйлера.

Преобразуем разностное уравнение (2), перенеся в правую часть значение сеточной функции с индексом $k$, а левую - с индексом $k+1$

$$\Theta_i^{k+1}=\Theta_i^k+\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(\Theta_{i+1}^k-2\Theta_i^k+\Theta_{i-1}^k\right) \qquad (3)$$

и введем коэффициент $K=\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}$, который называется коэффициентом Куранта и характеризует отношение шагов разностной схемы по пространству и времени. С учетом этого уравнение (3) можно записать в виде:

$$\Theta_i^{k+1}=\Theta_i^k+K\left(\Theta_{i+1}^k-2\Theta_i^k+\Theta_{i-1}^k\right).$$

Тогда решение системы уравнений заключается в выражении искомых $\Theta_i^{k+1}$ (на следующем шаге по времени) через известные значения $\Theta_i^k$.

Для решения уравнения теплопроводности применяют как явные, так и неявные разностные схемы. Последние требуют решения на каждом временном шаге. Явная схема для простейшего уравнения теплопроводности устойчива при соблюдении условия Куранта, накладываемого на шаги по времени и пространству:

$$K=\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}<1.$$

Неявная схема безусловно устойчива.

Моделирование объекта и соответствующего управления можно осуществить в среде *Mathcad*. Для определения моментов времени переключения задается функция, вычисляющая значение вектора состояния в зависимости от начальных условий, времени и управляющего воздействия.

Полученное решение может представлять практический интерес только для систем автоматического управления, которые содержат объекты управления невысокого порядка, в противном случае управление будет иметь слишком много переключений.

*Список использованной литературы*

**1. Пикина Г. А.** Математические модели теплоэнергетических объектов: учеб. пособие для вузов / Г. А. Пикина, Э. К. Аракелян. М.: Издательство МЭИ, 1997. 137 с.

**2. Самарский А. А., Гулин А. В.** Численные методы: учеб. пособие для вузов. М.: Наука; Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. 432 с.

**3. Теория автоматического управления** / под ред. А. В. Нетушила. М.: Высшая школа, 1976. 400 с.