Ипатова Валентина Михайловна

РАВНОМЕРНЫЙ АТТРАКТОР НЕАВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2009/12-1/13.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2009. № 12 (31): в 2-х ч. Ч. I. С. 39-42. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2009/12-1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

т.е. ток на зонд пропорционален потенциалу зонда, корню из концентрации плазмы и радиусу зонда, т.к. $I_з = 4\pi r_з^2$ и не зависит от электронной температуры. Для зависимости от α^2 получим

$$j_з = \frac{U^{1/2}\alpha^2 9}{4\sqrt{2}} = 1.59U^{1/2}\alpha^2 \quad (10)$$

При $a > 1$ и $U < a$ близка формула

$$j_з = 0.8 + \frac{U}{a} \quad (11)$$

Для цилиндра во всех диапазонах параметра a подходит при $U >> 1$ применимо выражение

$$j_з = \frac{0.44 + a^{1/3}}{2a} U^{2/3} + 0.5 \quad (12)$$

при $a \to 0$

$$j_з \approx 0.22\frac{U^{2/3}}{a} = \frac{9}{4\sqrt{2}}\frac{\alpha^2 0.0484}{U^{1/6}} = 0.077\frac{\alpha^2}{U^{1/6}} \quad (13)$$

Список литературы

1. **Зобнин А. В., Нефедов А. П., Синельщиков В. А., Фортов В. Е.** // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. Вып. 3. С. 554.
2. **Сонин А.** // Ракетная техника и космонавтика. 1966. № 9. С. 108.
3. **Сысун А. В., Шелестов А. С.** // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 8. С. 41.
4. **Швейгерт В. А., Швейгерт И. В., Беданов В. М. и др.** // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. Вып. 3. С. 877.
5. **Allen J. E., Boyd R. L. F., Reynolds P.** // Proc. phys. soc. 1957. V. B70. P. 297.
6. **Allen J. E., Turrin A.** // Proc. phys. soc. 1964. V. 83. P. 177.
7. **Bernstein I. B., Rabinowitz I. N.** // Phys. fluid. 1959. V. 2. № 2. P. 112.
8. **Chen F. F.** // J. nucl. energy. 1965. Part C. V. 7. P. 47.
9. **Kennedy R. V., Allen J. E.** // J. plasma physics. 2002. Part 4. V. 67. P. 243.
10. **Laframboise J. G.** The theory of spherical and cylindrical probes in a collisionless, Maxwellian plasma at rest / Institute for aerospace studies, University of Toronto (UTIAS). 1966. Report 100.
11. **Nairn C. M. C., Annaratone B. M., Allen J. E.** // Plasma sources sci. technol. 1998. V. 7. P. 478.

РАВНОМЕРНЫЙ АТТРАКТОР НЕАВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ипатова Валентина Михайловна

ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/500) и РФФИ (проект 09-01-00284-а)

Как известно, многие объекты окружающего нас мира представляют собой хаотические системы. Важное значение имеет понимание природы этой хаотичности на основе изучения динамики системы и описания всех её состояний, которые могут наблюдаться по прошествии достаточно большого промежутка времени. Особый интерес представляет минимальное множество состояний, равномерно притягивающее с течением времени все траектории диссипативной системы. Такое минимальное множество принято называть аттрактором. В настоящей работе вопрос о существовании аттрактора изучается на примере нелинейного ОДУ с зависящими от времени коэффициентами и правой частью.

1. Полупроцессы и их аттракторы

Вначале определим понятия полупроцессов и их аттракторов. При этом мы будем придерживаться изложения, принятого в [1, 2].

Пусть E - полное метрическое пространство с метрикой $\mathrm{dist}_E(\cdot,\cdot)$; T - нетривиальная подгруппа аддитивной группы $\mathbf{R}$ вещественных чисел, $T_+ = T \cap [0;+\infty]$ - полугруппа неотрицательных элементов из T. Например, $T_+ = \mathbf{R}_+ = [0,+\infty)$ для систем с непрерывным временем, $T_+ = \mathbf{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ и $T_+ = \mathbf{Z}_+\tau = \{0,\tau,2\tau,\ldots\}$, где $\tau > 0$, для систем с дискретным временем. Пусть при всех $h \in T_+$, $t \in T_+$, $t \ge h$ на E определены непрерывные операторы $U(t,h): E \to E$ такие, что

$$U(t,s)U(s,h) = U(t,h) \ \forall t,s,h \in T_+ : t \ge s \ge h \quad (1.1)$$

Тройку $\{U, T_+, E\}$ будем называть *полупроцессом*. Рассмотрим семейство операторов $U_f(t,h)$, функционально зависящих от символа $f = f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты и члены в правой части уравнения. Пусть F - некоторое множество символов и каждому

$f \in F$ поставлен в соответствие полупроцесс $\{U_f, T_+, E\}$. Множество всех полупроцессов $\{U_f, T_+, E\}$ таких, что $f \in F$, будем называть *семейством полупроцессов* (СПП) и обозначать как $\{U_f, T_+, E, F\}$.

Множество $P \subset E$ называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\{U_f, T_+, E, F\}$, если для любого ограниченного в E множества B имеет место равенство

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in T_+}} \sup_{f\in F} \operatorname{dist}_E\left(U_f(t,h)B, P\right) = 0 \quad \forall h \in T_+, \tag{1.2}$$

где $\operatorname{dist}_E(X,Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \operatorname{dist}_E(x,y)$.

Определение (1.2) можно сформулировать и следующим образом: множество $P \subset E$ называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\{U_f, T_+, E, F\}$, если для любого $\varepsilon > 0$, любого $h \in T_+$ и любого ограниченного в E множества B существует время $t_0 = t_0(\varepsilon, h, B) > 0$ такое, что

$$U_f(t+h,h)B \subseteq O_\varepsilon(P) \quad \forall t \in T_+, t > t_0, \quad \forall f \in F, \tag{1.3}$$

где $O_\varepsilon(P) = \bigcup_{x\in P} O_\varepsilon(x)$ есть ε-окрестность множества P в E.

Лемма 1.1. Если СПП имеет равномерно притягивающие множества P_1 и P_2, то их пересечение $P = P_1 \cap P_2$ является равномерно притягивающим множеством того же СПП.

Доказательство. Возьмём произвольные $\varepsilon > 0$ и ограниченное в E множество B. Существуют положительные t_1 и t_2 такие, что при $\forall f \in F$ верны включения

$$\begin{cases} U_f(t+h,h)B \subseteq O_\varepsilon(P_1) & \forall t \in T_+, t > t_1 \\ U_f(t+h,h)B \subseteq O_\varepsilon(P_2) & \forall t \in T_+, t > t_2 \end{cases} \tag{1.4}$$

Пусть $t_0 = \max\{t_1, t_2\}$, из соотношений (1.4) вытекает включение

$$U_f(t+h,h)B \subseteq O_\varepsilon(P_1) \cap O_\varepsilon(P_2) = O_\varepsilon(P) \quad \forall t \in T_+, t > t_0, \ \forall f \in F, \tag{1.5}$$

которое и доказывает нашу лемму.

Равномерным аттрактором семейства полупроцессов называется его наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество. Равномерный аттрактор СПП будем для краткости называть просто *аттрактором*.

Лемма 1.2. Если СПП имеет аттрактор A и P - некоторое замкнутое равномерно притягивающее множество того же СПП, то $A \subseteq P$.

Доказательство. В силу леммы 1.1 пересечение $A_1 = A \cap P$ является равномерно притягивающим множеством рассматриваемого СПП. Очевидно, A_1 замкнуто и $A_1 \subseteq A$. Так как A - наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество, то верно равенство $A_1 = A$, значит $A \subseteq P$.

Следствие. СПП может иметь не более одного аттрактора.

Доказательство. Пусть некоторое СПП имеет аттракторы A_1 и A_2. По лемме 1.2 справедливы включения $A_1 \subseteq A_2$ и $A_2 \subseteq A_1$, поэтому $A_1 = A_2$.

Достаточные условия существования аттрактора дает следующая

Теорема 1.1 [1]. Если семейство полупроцессов обладает компактным равномерно притягивающим множеством, то указанное СПП имеет компактный аттрактор.

2. Аттрактор неавтономного ОДУ

Пусть функции $a^0(t)$, $b^0(t)$, $f^0(t)$ непрерывны на $T_+ = \mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$, причем существуют постоянные α, β, σ такие, что

$$0 < \alpha \le a^0(t), \ |b^0(t)| \le \beta, \ |f^0(t)| \le \sigma \quad \forall t \ge 0 \tag{2.1}$$

Введем вектор $q^0(t) = (a^0(t), b^0(t), f^0(t))$, обозначим через $T(h)$, $h \ge 0$, операторы сдвига по времени, то есть $T(h)f^0(t) = f^0(t+h)$, и через

$$F = \bigcup_{h\ge 0} T(h)q^0(t) = \bigcup_{h\ge 0} q^0(t+h) \tag{2.2}$$

множество всех его неотрицательных сдвигов по времени вектора $q^0(t)$. Очевидно, для операторов $T(h)$ и множества F выполняются свойства (1.3) - (1.5). Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)\sin x^2 = f(t), \\ x|_{t=h} = x_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $h \ge 0$, $x \in E = \mathbf{R}$, $q(t) = (a(t), b(t), f(t)) \in F$.

Из (2.1) - (2.2) следует, что для всех $q(t) \in F$ выполняются неравенства

$$0 < \alpha \le a(t),\ |b(t)| \le \beta,\ |f(t)| \le \sigma \quad \forall t \ge 0 \tag{2.4}$$

Вектор $q(t) = (a(t), b(t), f(t)) \in F$ является *символом*, то есть множеством всех зависящих от времени коэффициентов и членов в правой части уравнения (2.3). По теореме о продолжении решений нормальных систем, решение задачи (2.3) определено при $\forall t \ge 0$. Будем его записывать как $x(t) = U_q(t,h)x_0$, $t \ge h$. Тем самым заданы операторы $U_q(t,h)$, обладающие свойством (1.1) при $\forall q \in F$. Непрерывность $U_q(t,h)$ следует из теоремы о непрерывной зависимости от начального условия решений задачи Коши. Таким образом, для каждого $q \in F$ определён *полупроцесс* $\{U_q, \mathbf{R}_+, E\}$, где $\mathbf{R}_+ = T_+ = [0, +\infty)$ - область изменения переменной t, $E = \mathbf{R}$ - множество, которому принадлежат начальные состояния x_0. Объединение этих полупроцессов по всем $q \in F$ образует *семейство полупроцессов* $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$, порождаемое задачей (2.3).

В дальнейшем нам потребуется

Лемма 2.1. Для всех чисел $A, B \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$AB \le \varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon} \tag{2.5}$$

Доказательство даётся равенством $\varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon} - AB = \left(\sqrt{\varepsilon}A + \frac{B}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2$.

Теорема 2.1. Для решения задачи (2.3) при всех $t \ge h$ выполняется оценка

$$x^2(t) \le e^{-\alpha(t-h)}x_0^2 + \frac{G^2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha(t-h)}) \tag{2.6}$$

где $G = \sigma + \beta$.

Доказательство. Умножая (2.3) на x, получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + a(t)x^2 + b(t)x\sin x^2 = xf(t) \tag{2.7}$$

Из (2.4) и (2.7) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + \alpha x^2 \le \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + a(t)x^2 = xf(t) - b(t)x\sin x^2 \le |xf(t)| + |b(t)x\sin x^2| \le G|x| \tag{2.8}$$

Используя (2.5), оценим член в правой части (2.8)

$$G|x| \le \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{G^2}{2\alpha} \tag{2.9}$$

Подставив (2.9) в (2.8), получаем неравенство

$$\frac{dx^2}{dt} + \alpha x^2 \le \frac{G^2}{\alpha} \tag{2.10}$$

Умножив (2.10) на $e^{\alpha t}$, приведём его к виду

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}x^2\right) \le \frac{G^2}{\alpha}e^{\alpha t} \tag{2.11}$$

Проинтегрировав (2.11) по времени от h до $t \ge h$, имеем

$$e^{\alpha t}x^2(t) - e^{\alpha h}x_0^2 \le \frac{G^2}{\alpha^2}(e^{\alpha t} - e^{\alpha h}) \tag{2.12}$$

Поделив (2.12) на $e^{\alpha t}$, получаем (2.6).

Теорема 2.2. Семейство полупроцессов $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$, порождаемое задачей (2.3), имеет аттрактор A, причём

$$|x| \le G/\alpha \quad \forall x \in A \tag{2.13}$$

Доказательство. Покажем, что отрезок $P = [-G/\alpha, G/\alpha]$ является равномерно притягивающим множеством СПП $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$. Возьмём произвольные $\varepsilon > 0$ и ограниченное множество $B \subset \mathbf{R}$. Существует постоянная $M > 0$ такая, что $|x| \le M$ для всех $x \in B$. Используя (2.6), находим, что для решений (2.3) с начальным условием $x_0 \in B$ верна оценка

$$x^2(t) \le e^{-\alpha(t-h)}M^2 + \frac{G^2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha(t-h)}) \tag{2.14}$$

Из (2.14) вытекает, что:

1) если $M < G/\alpha + \varepsilon$, то $x(t) \in O_\varepsilon(P) = (-\varepsilon - G/\alpha, G/\alpha + \varepsilon)$ всех $t \geq h$, $x_0 \in B$, $q \in F$;

2) если $M \geq G/\alpha + \varepsilon$, то $x(t) \in O_\varepsilon(P)$ при всех $t > h + t_0$, $x_0 \in B$, $q \in F$, где $t_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\varepsilon\alpha(2G + \varepsilon\alpha)}{\alpha^2 M^2 - G^2}$.

По теореме 1.1 семейство полупроцессов $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$ имеет компактный аттрактор A. Поскольку $A \subseteq P$, то верно (2.13).

Список литературы

1. **Chepyshov V. V., Vishik M. I.** Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. math. pures appl. 1994. V. 73. P. 279-333.
2. **Ипатова В. М.** Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Математический сборник. 1997. Т. 188. № 6. С. 47-56.

АНАЛИЗ ФОРМУЛИРОВОК ФИЗИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ «РАБОТА» И «ЭНЕРГИЯ», ВХОДЯЩИХ В ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Исмухамбетова Альбина Салаутовна
Астраханский государственный университет

В этой статье обсуждаются формулировки физических понятий «работа» и «энергия», входящих в закон сохранения энергии. Формулировки, предлагаемые учащимся, должны быть не только ясными и недвусмысленными, но и, прежде всего, корректными. Главное внимание здесь уделяется учебным аспектам.

Проведенный анализ учебной и методической литературы позволил установить, что в последние десять-пятнадцать лет появилось довольно много учебников и учебных пособий по физике, в которых формулировки понятий «работа» и «энергия» трактуются вразнобой, причем их авторы порой противоречат не только друг другу, но и самим себе. Встречаются и ошибочные формулировки. Поэтому специально выбраны словесные формулировки и определения физических понятий. Это сделано для того, чтобы дополнительно подчеркнуть важность терминологии в физике при формировании её понятийного аппарата. Наиболее подробно остановимся на эволюции содержаний понятий, входящих в закон сохранения энергии (работа, энергия).

Из анализа учебников по физике видно, что вначале вводится понятие работы, а затем энергии. Проанализировав за историей развития физики, можно также увидеть, что понятие механической работы в науку было введено раньше, и на основе его было сформулировано более общее понятие - энергия. Объясняется это тем, что физиков в большей степени интересуют процессы перехода системы из одного состояния в другое. Однако понятие работы и с физической, и с философской, и с математической точек зрения сложнее понятия энергии. Очевидно, этим объясняется то, что в трудах многих физиков, посвятивших свои исследования энергетическим вопросам, проанализировано понятие энергии и не раскрыто понятие работы (не определено).

Вопрос, что такое работа с энергетической точки зрения, был проанализирован Ф. Энгельсом. Он писал, что «механическое движение нигде и никогда не может произвести работу хотя бы на одну миллионную часть килограммометра, если оно не будет по видимости уничтожено как таковое, если оно не превратится в какую-нибудь другую форму движения»; «основным условием всякой физической работы является качественное изменение, перемена формы».

Для изучения понятия работы и энергии важное значение имеет обобщение, полученное в итоге изучения кинематики и динамики: всякое изменение (увеличение или уменьшение) скорости, а также искривление траектории движения вызываются одной и той же причиной - взаимодействием тел, действием на движущееся тело окружающих тел или полей. На этой основе формируется понятие работы как количественной характеристики макроскопического процесса передачи движения от одного тела к другому, разъясняется определение работы, данное Энгельсом: «Работа - это изменение формы движения, рассматриваемое с его количественной стороны».

Формирование понятия работы характеризуется определенными трудностями. Часто это понятие усваивается формально - учащиеся знают формулу для вычисления работы и единицы измерения, но не знают содержания, мировоззренческой сущности этого важнейшего понятия. Происходит это потому, что основной упор при изучении материала обычно делается на вычисление работы, и, таким образом, уделяется большее внимание математической стороне вопроса. Мало способствует усвоению содержания понятия работы генерализация понятия силы, фактически подменяющая понятие взаимодействие тел: «работ силы», «прилагая силу, мы движем тело», «во всех движущихся механизмах действуют силы, которые совершают работу», «работа движущей силы» и т.п. Все это является только условным, абстрактным обозначением работы, состоящей, как известно, в передаче механического движения от одного тела к другому. Нельзя согласиться и с утверждением, что «вопрос о том, чему приписывать произведенную работу - силе или телу, не имеет большего значения». Наоборот, этот вопрос имеет важное методологическое значение. Работа характеризует взаимодействие тел и является физической величиной, количественно характеризующей макроскопический