вания равномерно упрочненного поверхностного слоя при одновременном снижении отрицательных проявлений технологической наследственности от предшествующих операций.

Проведенные исследования являются резервом повышения эффективности использования методов ППД и позволяют наметить нуги оптимизации упрочняющей технологии тяжслонагруженных опор качения с целью повышения их надежности и долговечности.

ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОЛНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУР ВПЛОТЬ ДО КОНЦОВ РЕГЕНЕРАТОРА С ВЫСОКОТЕПЛОПРОВОДНОЙ НАСАДКОЙ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПРЕДЕЛЁННОЙ НАЧАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ (ЗАДАЧА АНЦЕЛИУСА-НУССЕЛЬТА) И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

Лобанов Игорь Евгеньевич
Московский авиационный институт (государственный технический университет)

Данное исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 09-08-00440); Президента РФ по государственной поддержке научных исследований молодых российских учёных-докторов наук (грант МД № 1420.2008.8)

1. Исходная система дифференциальных уравнений в частных производных

Распределение температур в регенераторе, согласно работе [Хаузен, 1981], описываются системой следующих дифференциальных уравнений для плоских элементов насадки:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial f}\right)_t = \dfrac{\overline{\alpha}}{C}\left(\Theta_m - \vartheta\right); \\ \left(\dfrac{\partial \Theta_m}{\partial t}\right)_f = \dfrac{2\overline{\alpha}}{\rho c \delta}\left(\vartheta - \Theta_m\right), \end{cases} \qquad (1)$$

где t - время; f - поверхность нагрева насадки между местом входа теплоносителя и рассматриваемым поперечным сечением; δ - толщина плоского элемента насадки; ϑ - температура теплоносителя; Θ_m - средняя по поперечной координате температура насадки в рассматриваемом поперечном сечении к моменту t; C - полная теплоёмкость массового расхода теплоносителя; $\overline{\alpha}$ - коэффициент теплоотдачи, отнесённый к средней температуре насадки Θ_m.

Та же самая система уравнений в частных производных для насадки из элементов произвольной формы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial f}\right)_t = \dfrac{\overline{\alpha}}{C}\left(\Theta_m - \vartheta\right); \\ \left(\dfrac{\partial \Theta_m}{\partial t}\right)_f = \dfrac{\overline{\alpha} df}{dC_S}\left(\vartheta - \Theta_m\right), \end{cases} \qquad (2)$$

где df и dC_S - поверхность и теплоёмкость элементарного элемента насадки соответственно.

Для упрощения математической записи в дальнейшем будет опускать индекс m в Θ_m, что обычно делалось в классических работах [Anzelius, 1926; Nußelt, 1927; Хаузен, 1981; Кошкин, 1973; Kalinin, 1994; Галицейский, 1970; Schumann, 1929]. Однако, следует всегда иметь в виду, что символ представляет собой действительную температуру только для металлических насадок из тонкого листа, а в общем случае Θ - средняя по поперечной координате температура насадки в рассматриваемом сечении регенератора.

При данной постановке задачи теплофизические свойства и коэффициенты теплоотдачи не зависят от температуры, поэтому, для приведения системы уравнения к более удобной для решения форме, введём две безразмерные переменные ξ и η согласно следующим определяющим уравнениям для плоских элементов насадки:

$$d\xi = \frac{\overline{\alpha}}{C} df; \qquad (3)$$

$$d\eta = \frac{2\overline{\alpha}}{\rho c \delta} dt; \qquad (4)$$

для насадки из элементов произвольной формы:

$$d\eta = \frac{\overline{\alpha} df}{dC_S} dt = \frac{\overline{\alpha} F}{C_S} dt, \qquad (5)$$

где F - полная площадь нагрева; C_S - теплоёмкость насадки регенератора.

Поскольку $\overline{\alpha}, C, \rho c\delta$ постоянны, то можно также записать для плоских элементов насадки:

$$\xi = \frac{\overline{\alpha}}{C} f; \tag{6}$$

$$\eta = \frac{2\overline{\alpha}}{\rho c\delta} t; \tag{7}$$

для насадки из элементов произвольной формы:

$$\eta = \frac{\overline{\alpha} df}{dC_S} t = \frac{\overline{\alpha} F}{C_S} t. \tag{8}$$

Переменная ξ называется приведённой продольной координатой, потому что неё в качестве продольной координаты входит поверхность нагрева *f*, а переменная η - приведённым временем, поскольку в неё входит время.

Учитывая вышеизложенное, система уравнений в частных производных в приведённых координатах для детерминирования температур в регенераторе примет следующий вид:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_\eta = \Theta - \vartheta; \\ \left(\dfrac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right)_\xi = \vartheta - \Theta. \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, благодаря вышеизложенному преобразованию, в систему дифференциальных уравнений в частных производных кроме неизвестных величин ϑ и Θ входят две независимые переменные (вместо 7: $\overline{\alpha}, C, \rho, c, \delta, f, t$).

В дальнейшем в рамках данное исследование будет посвящено получению точных решений именно этой системы дифференциальных уравнений в частных производных, далее называемой исходной, детерминирующей полное распределение температур в регенераторе.

2. Точное аналитическое решение задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой одинаково распределённой начальной температурой (θ_1=0 при η=0)

Решение системы уравнений в частных производных в квадратурах было впервые получено Анцелиусом [Anzelius, 1926] и независимо от него Нуссельтом [Nußelt, 1927]. В несколько видоизмененной, не меняя существа дела, форме оно приводится в монографии [Хаузен, 1981].

Вышеуказанное решение так же можно получить с помощью преобразования Лапласа по методике, изложенной [Кошкин, 1973; Kalinin, 1994; Галицейский, 1970].

Постановка задачи выглядит следующим образом.

В начальный момент времени при η=0 насадки имеет всюду одинаковую температуру Θ_1=const; начиная с этого момента теплоноситель входит в регенератор в сечении ξ=0 с неизменной во времени температурой $\vartheta = \vartheta_1$ и движется через регенератор в положительном направлении оси ξ.

К определённому моменту времени η будет иметь место соответствующее распределение температур насадки Θ и теплоносителя ϑ.

Требуется детерминировать вышеуказанное распределение температур насадки Θ и теплоносителя ϑ при заданных значениях Θ_1 и ϑ_1.

Решения в квадратурах исходной системы уравнений в частных производных для температур движущей среды ϑ и насадки Θ выглядят следующим образом [Anzelius, 1926; Nußelt, 1927; Хаузен, 1981]:

$$\vartheta = \vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \Theta_1\right)\int_0^\xi e^{-(\xi+\eta)} J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right] d\xi; \tag{10}$$

$$\Theta = \Theta_1 + \left(\vartheta_1 - \Theta_1\right)\int_0^\eta e^{-(\xi+\eta)} J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right] d\eta. \tag{11}$$

Решение для Θ (11) в том случае, когда её нужно рассчитать при заданном η для различных значений ξ лучше использовать решение, представленное в [Хаузен, 1981] следующим образом:

$$\Theta = \vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \Theta_1\right)e^{-\eta} + \left(\vartheta_1 - \Theta_1\right)\int_0^\xi e^{-(\xi+\eta)} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right] d\xi. \tag{12}$$

В выражениях (10)-(12): J_0 - функция Бесселя (цилиндрическая функция) первого рода нулевого порядка, J_1 - функция Бесселя первого рода первого порядка [Градштейн, 1971].

Для функции Бесселя первого рода n-го порядка [Там же]:

$$J_n(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{\nu}}{\nu!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}, \tag{13}$$

где $\Gamma(y)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{y-1}dt$ - гамма-функция.

При n=0 и n=1 соответственно имеем:

$$J_0(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{\nu}}{\nu!\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}; \tag{14}$$

$$J_1(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{\nu}}{\nu!\Gamma(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+1}. \tag{15}$$

Используя свойство гамма-функции для целых значений n [Там же] - $\Gamma\left(\mathrm{n}+1\right)=\mathrm{n}!$, - получим:

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{\left(n!\right)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}; \tag{16}$$

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}. \tag{17}$$

Вплоть до настоящего времени решения квадратурах (10)-(12) детерминировались только численным образом. Для этих целей использовалась соответствующие диаграммы, приведённые, например, в [Хаузен, 1981], или более точные и подробные [Schumann, 1929].

В рамках данного исследования ставится задача точного аналитического решения исходной системы уравнений.

Полученные точные решения системы уравнений имеют широкую общность и могут быть непосредственно использованы для расчётов полного распределения температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой для регенеративных теплообменных аппаратов.

Для получения точного решения рациональнее всего использовать подход, успешно применённый в работах [Лобанов, 2006; 2008].

Чтобы получить точное решение исходной системы уравнений в частных производных, необходимо разложить в степенной ряд экспоненциальную функцию и функции Бесселя первого рода нулевого J_0 и первого J_1 порядков, входящих в квадратуры (10)-(12) [Градштейн, 1971]:

$$e^{-(\xi+\eta)}=e^{-\xi}e^{-\eta}=e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\eta^n=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\xi^n; \tag{18}$$

$$J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n!\right)^2}\left(\frac{2i\sqrt{\xi\eta}}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n\eta^n}{\left(n!\right)^2}; \tag{19}$$

$$iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}=i\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!(n+1)!}\left(\frac{2i\sqrt{\xi\eta}}{2}\right)^{2n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^{n+1}}{n!(n+1)!}\xi^n. \tag{20}$$

Таким образом, имеем следующие степенные ряды:

$$J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_{1n}\xi^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\eta^n; \tag{21}$$

$$iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}=-\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n}\xi^n. \tag{22}$$

$$e^{-\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\eta^n; \tag{23}$$

$$e^{-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n, \tag{24}$$

где $a_{1n}=\frac{\eta^n}{\left(n!\right)^2}$, $a_{2n}=\frac{\xi^n}{\left(n!\right)^2}$, $a_{3n}=-\frac{\eta^{n+1}}{n!(n+1)!}$; $b_n=\frac{(-1)^n}{n!}$.

Произведения экспоненциальной функции и функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно равны:

$$e^{-\xi}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_{1n}\xi^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}a_{1m}b_{n-m}\right)\xi^n; \tag{25}$$

$$e^{-\eta}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\eta^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n\eta^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}a_{2m}b_{n-m}\right)\eta^n; \tag{26}$$

$$e^{-\xi}iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{3n}\xi^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}a_{3m}b_{n-m}\right)\xi^n. \tag{27}$$

После подстановки, получим:

$$e^{-\xi}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right)\xi^n; \tag{28}$$

$$e^{-\eta}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right)\eta^n; \tag{29}$$

$$e^{-\xi}iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{\eta^{m+1}}{m!(m+1)!}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right)\xi^n. \tag{30}$$

Теперь необходимо провести соответствующие интегрирования, используя правило интегрирования бесконечных степенных рядов:

$$\int_0^{\xi}e^{-(\xi+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\xi=e^{-\eta}\int_0^{\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\right)\xi^n d\xi=$$

$$=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\right)\xi^n d\xi=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\right)\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}\Bigg|_0^{\xi}; \tag{31}$$

$$\int_0^{\eta}e^{-(\xi+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\eta=e^{-\xi}\int_0^{\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\right)\eta^n d\eta=$$

$$=e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\eta}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\right)\eta^n d\eta=e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\right)\frac{\eta^{n+1}}{(n+1)}\Bigg|_0^{\eta}; \tag{32}$$

$$\int_0^{\xi}e^{-(\xi+\eta)}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\xi=-e^{-\eta}\int_0^{\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^{m+1}}{m!(m+1)!}\right)\xi^n d\xi= \tag{33}$$

$$=-e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^{m+1}}{m!(m+1)!}\right)\xi^n d\xi=-e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^{m+1}}{m!(m+1)!}\right)\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}\Bigg|_0^{\xi}.$$

После подстановки пределов интегрирования, окончательно получим:

$$\int_0^{\xi}e^{-(\xi+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\xi=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}; \tag{34}$$

$$\int_0^{\eta}e^{-(\xi+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\eta=e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\frac{\eta^{n+1}}{(n+1)}; \tag{35}$$

$$\int_0^{\xi}e^{-(\xi+\eta)}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}iJ_1\left[2i\sqrt{\xi\eta}\right]d\xi=-e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^{m+1}}{m!(m+1)!}\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}. \tag{36}$$

Окончательные выражения для решений исходной системы уравнений будут выглядеть следующим образом:

$$\vartheta=\vartheta_1-\left(\vartheta_1-\Theta_1\right)e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^m}{(m!)^2}\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}; \tag{37}$$

$$\Theta=\Theta_1+\left(\vartheta_1-\Theta_1\right)e^{-\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\xi^m}{(m!)^2}\frac{\eta^{n+1}}{(n+1)}; \tag{38}$$

$$\Theta=\vartheta_1-\left(\vartheta_1-\Theta_1\right)e^{-\eta}-\left(\vartheta_1-\Theta_1\right)e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^{m+1}}{m!(m+1)!}\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}= \tag{39}$$

$$=\vartheta_1-e^{-\eta}\left(\vartheta_1-\Theta_1\right)\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\frac{\eta^{m+1}}{m!(m+1)!}\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)}\right).$$

Точные аналитические решения (38) и (39) эквивалентны, в отличие от приближённых решений (11) и (12) соответственно, что является дополнительным преимуществом полученных первых решений перед последними, поскольку интегрирования по ξ и η неэквивалентны. Поэтому достаточно только одного точного аналитического решения, в то время как для численных расчётов могут понадобиться решения, содержащие интегрирование как по ξ, так и по η. Преимущественность точных аналитических решений исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных над приближёнными указываются также в аналогичных исследованиях [Лобанов, 2006; 2008].

Расчёт по точным решениям (37) или (38)-(39) полностью соответствует данным, представленным на диаграммах, приведённых в [Хаузен, 1981; Schumann, 1929; Леонтьев, 1997], но имеет перед последними неоспоримое преимущество, поскольку данные [Там же] были получены численным образом. Неоспоримое преимущество точных решений состоит также в том, что они не имеют известного рода ограничений относительно определяющих параметров ξ и η, имеющихся в [Там же].

Проведённые в рамках данного исследования численные расчёты решений исходной системы уравнений по формулам (10), (11) или (12) для широкого диапазона определяющих параметров ξ и η полностью соответствуют расчётам по точным решениям (37), (38) или (39), если расчёты проводятся при одинаковой наперёд заданной погрешностью, следовательно, доказана редукция существующих численных решений по отношению к точным аналитическим решениям, полученным в рамках данного исследования.

Ещё одним неоспоримым достоинством точных аналитических решений перед существующими численными состоит в выявлении имманентной связи между определяющими и определяемыми параметрами, так же то, что ими можно непосредственно воспользоваться при расчёте, не прибегая к помощи диаграмм (номограмм) или вычислительной техники.

3. Точное аналитическое решение задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой с произвольно распределённой начальной температурой

В предыдущем разделе было получено точное аналитическое решение задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой одинаково распределённой начальной температурой, т.е. в предположении, что в начальный момент времени η=0 насадка имеет всюду одинаковую температуру Θ_1=0. Следовательно, возникает необходимость получения точного аналитического решения задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой с произвольно распределённой начальной температурой.

Постановка задачи в этом случае будет выглядеть следующим образом.

В начальный момент времени η=0 теплоноситель входит в регенератор в сечении ξ=0 с неизменной температурой $\vartheta = \vartheta_1$. Температура насадки к моменту времени η=0 является произвольно заданной функцией координаты ξ, а именно:

$$\Theta = \vartheta_1 + f(\xi), \tag{40}$$

где $f(\xi)$ - начальная избыточная температура насадки относительно температуры теплоносителя на входе.

Начиная с этого момента теплоноситель входит в регенератор в сечении ξ=0 с неизменной во времени температурой $\vartheta = \vartheta_1$ и движется через регенератор в положительном направлении оси ξ. К определённому моменту времени η будет иметь место соответствующее распределение температур насадки Θ и теплоносителя ϑ.

Требуется детерминировать вышеуказанное распределение температур насадки Θ и теплоносителя ϑ при заданном произвольном распределении температуры насадки $\Theta = \vartheta_1 + f(\xi)$ и температуре теплоносителя ϑ_1.

Решения в квадратурах исходной системы уравнений в частных производных для температур движущей среды ϑ и насадки Θ в этом случае выглядят следующим образом [Nußelt, 1927; Хаузен, 1981]:

$$\vartheta = \vartheta_1 + \int_0^{\xi} f(\varepsilon) e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} J_0\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right] d\varepsilon; \tag{41}$$

$$\Theta = \vartheta_1 + f(\xi) e^{-\eta} - \int_0^{\xi} f(\varepsilon) e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} \sqrt{\frac{\eta}{\xi-\varepsilon}}\, i\, J_1\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right] d\varepsilon. \tag{42}$$

Методом непосредственной подстановки можно показать, что это решение удовлетворяет вышепредставленным условиям: $\vartheta|_{\xi=0} = \vartheta_1$; $\Theta|_{\eta=0} = \vartheta_1 + f(\xi)$, что дополнительно показано в [Хаузен, 1981].

Данные решения квадратурах (41)-(42) рассчитывались только численным образом. Для получения точных решений и в этом случае воспользуемся тем же методом, применённом в предыдущем разделе, а также в [Лобанов, 2006; 2008].

В общем случае начальная избыточная температура насадки относительно температуры теплоносителя на входе $f(\xi)$ может быть представлена в следующем виде:

$$f\left(\xi\right)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cdot\xi^n. \tag{43}$$

Следовательно, первый интеграл (41) может быть представлен в следующем виде:

$$\int_0^{\xi}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cdot\varepsilon^n\cdot e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right]d\varepsilon==\int_0^{\xi}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cdot\varepsilon^n\cdot e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)}J_0\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right]d\varepsilon= \tag{44}$$

$$=\int_0^{\xi}e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,\varepsilon^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\varepsilon-\xi\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{\left(\varepsilon-\xi\right)^n\eta^n}{\left(n!\right)^2}d\varepsilon.$$

После произведения двух последних рядов по правилу, применённому в предыдущем разделе (а также в [Лобанов, 2006; 2008]), получим:

$$\int_0^{\xi}e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,\varepsilon^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\varepsilon-\xi\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{\left(\varepsilon-\xi\right)^n\eta^n}{\left(n!\right)^2}d\varepsilon=$$

$$=\int_0^{\xi}e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,\varepsilon^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(n-m\right)!}\left(\varepsilon-\xi\right)^n d\varepsilon. \tag{45}$$

Теперь следует привести двойной ряд по степеням $(\varepsilon-\xi)^n$ к рядам со степенями по ε^n:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(n-m\right)!}\left(\varepsilon-\xi\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(n-m\right)!}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}\xi^k\varepsilon^{n-k}= \tag{46}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(n-m\right)!}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k C_n^k\xi^k\varepsilon^{n-k},$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$ - биномиальные коэффициенты (число сочетаний из *n* элементов по *k*).

Произведение последнего ряда (46) на ряд для начальной избыточной температуры насадки относительно температуры теплоносителя на входе (43) по уже известному правилу даёт:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\varepsilon^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(n-m\right)!}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k C_n^k\xi^k\varepsilon^{n-k}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(p-m\right)!}\sum_{k=0}^{p}\left(-1\right)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\varepsilon^{n-k}. \tag{47}$$

Далее проводится интегрирование, как и в предыдущем разделе, используя правило интегрирования бесконечных степенных рядов:

$$\int_0^{\xi}e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(p-m\right)!}\sum_{k=0}^{p}\left(-1\right)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\,\varepsilon^{n-k}\,d\varepsilon=$$

$$=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(p-m\right)!}\sum_{k=0}^{p}\left(-1\right)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\,\varepsilon^{n-k}d\varepsilon=$$

$$=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(p-m\right)!}\sum_{k=0}^{p}\left(-1\right)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\,\varepsilon^{n-k}d\varepsilon=$$

$$=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(p-m\right)!}\sum_{k=0}^{p}\left(-1\right)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\left.\frac{\varepsilon^{n-k+1}}{n-k+1}\right|_0^{\xi}= \tag{48}$$

$$=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(p-m\right)!}\sum_{k=0}^{p}\left(-1\right)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\left.\frac{\varepsilon^{n-k+1}}{n-k+1}\right|_0^{\xi}=$$

$$=e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\frac{\left(-1\right)^m}{\left(m!\right)^2}\eta^m\frac{1}{\left(p-m\right)!}\sum_{k=0}^{p}\left(-1\right)^k C_p^k\xi^k f_{n-p}\frac{\xi^{n-k+1}}{\left(n-k+1\right)}.$$

После соответствующих упрощений искомое решение будет выглядеть следующим образом:

$$\vartheta = \vartheta_1 + e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^{m+k}}{(m!)^2} \frac{1}{(p-m)!} \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{1}{(n-k+1)} f_{n-p} \eta^m \xi^{n+1}. \qquad (49)$$

Аналогичным образом можно получить решение относительно второго интеграла (42):

$$\int_0^{\xi} f(\varepsilon) e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} \sqrt{\frac{\eta}{\xi-\varepsilon}}\, i J_1\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right] d\varepsilon = = \int_0^{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot e^{-(\xi-\varepsilon+\eta)} \sqrt{\frac{\eta}{\xi-\varepsilon}}\, i J_1\left[2i\sqrt{(\xi-\varepsilon)\eta}\right] d\varepsilon = \qquad (50)$$

$$= \int_0^{\xi} e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\varepsilon-\xi)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\varepsilon-\xi)^n \eta^{n+1}}{n!(n+1)!} d\varepsilon.$$

Произведение двух последних рядов по правилу, применённому в предыдущем разделе (а также в [Лобанов, 2006; 2008]), даёт:

$$\int_0^{\xi} e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\varepsilon-\xi)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\varepsilon-\xi)^n \eta^{n+1}}{n!(n+1)!} d\varepsilon =$$

$$= \int_0^{\xi} e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(n-m)!} (\varepsilon-\xi)^n d\varepsilon. \qquad (51)$$

Приведение двойного ряда по степеням $(\varepsilon-\xi)^n$ к рядам со степенями по ε^n даёт:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(n-m)!} (\varepsilon-\xi)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(n-m)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \xi^k \varepsilon^{n-k} = \qquad (52)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(n-m)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \xi^k \varepsilon^{n-k}.$$

Произведение ряда (52) на ряд для начальной избыточной температуры насадки относительно температуры теплоносителя на входе (43) по уже известному правилу даёт:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \varepsilon^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(n-m)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \xi^k \varepsilon^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p} \varepsilon^{n-k}. \qquad (53)$$

Далее проводится интегрирование, как и в предыдущем разделе, используя правило интегрирования бесконечных степенных рядов:

$$\int_0^{\xi} e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p}\, \varepsilon^{n-k}\, d\varepsilon =$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\xi} \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p}\, \varepsilon^{n-k} d\varepsilon =$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\xi} \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p}\, \varepsilon^{n-k} d\varepsilon =$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p} \left. \frac{\varepsilon^{n-k+1}}{n-k+1} \right|_0^{\xi} = \qquad (54)$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p} \left. \frac{\varepsilon^{n-k+1}}{n-k+1} \right|_0^{\xi} =$$

$$= e^{-\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \eta^{m+1} \frac{1}{(p-m)!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k \xi^k f_{n-p} \frac{\xi^{n-k+1}}{(n-k+1)}.$$

После упрощений искомое решение примет вид:

$$\Theta = \vartheta_1 + f(\xi)e^{-\eta} -$$

$$-e^{-\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^{m+k+1}}{m!(m+1)!}\frac{1}{(p-m)!}\frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{1}{(n-k+1)}f_{n-p}\eta^{m+1}\xi^{n+1}. \quad (55)$$

Окончательным видом решения для Θ будет представление его в том же виде, что и для решения для ϑ (49):

$$\Theta = \vartheta_1 + e^{-\eta}\times \quad (56)$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}f_n\cdot\xi^n - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{p}\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^{m+k+1}}{m!(m+1)!}\frac{1}{(p-m)!}\frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{1}{(n-k+1)}f_{n-p}\eta^{m+1}\xi^{n+1}\right).$$

Преимущество решений (49) и (56) перед (41) и (42) состоит том, что решения (49) и (56) являются точными решениями исходной системы уравнений в частных производных, в то время как (41) и (42) - лишь приближёнными.

В рамках данной работы были проведены численные расчёты решений исходной системы уравнений по формулам (41) и (42) для широкого диапазона определяющих параметров ξ и η, а также для многообразных функций для начальной избыточной температуры насадки относительно температуры теплоносителя на входе $f(\xi)$.

Вышеуказанные расчёты полностью совпали с расчётами по точным решениям (49) и (56), поскольку проводились с одинаковой наперёд заданной погрешностью.

Следовательно, доказана редукция существующих численных решений по отношению к точным аналитическим решениям, полученным в рамках данного исследования.

Достоинство полученных точных аналитических (49) и (56) решений перед существующими численными (41) и (42) состоит также в выявлении имманентной связи между определяющими и определяемыми параметрами, и их можно непосредственно использовать при расчёте, не прибегая к помощи вычислительной техники.

Нелишне будет отметить, что в том случае, когда функция для начальной избыточной температуры насадки относительно температуры теплоносителя на входе $f(\xi)$ будет иметь более простой вид по сравнению с общим видом (43), точное аналитическое решение может быть получено несколько проще путём интегрирования соответствующих функциональных рядов.

В последнем случае вид точных аналитических решений будет более простым, чем вид решений (49) и (56).

4. Точное аналитическое решение задачи о распределении температур в перекрёстно-точном регенераторе при чисто перекрёстном токе

Впервые теория расчёта распределения температур при чисто перекрёстном токе была разработано в работах В. Нуссельта [Nußelt, 1911; 1930].

Согласно вышеупомянутой теории, более тёплый теплоноситель движется в пространстве между вертикальными трубами перекрёстно-точного рекуператора слева направо, в то время как холодный теплоноситель движется по трубам снизу вверх.

Принимается в качестве упрощения, что все трубы разрезаны в продольном направлении и развёрнуты в плоскую пластину, площадь которой F равна суммарной поверхности нагрева всех труб.

Следовательно, определённая точка пластины характеризуется координатами x и x', а длины сторон пластины равны соответственно L и L'.

Температуры теплоносителей в точке с координатами xx' обозначим ϑ и ϑ' соответственно.

Дифференциальные уравнения, детерминирующие распределение температур в перекрёстно-точном регенераторе при чисто перекрёстном токе, согласно [Хаузен, 1981]:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = \vartheta' - \vartheta;\\[2mm] \dfrac{\partial\vartheta'}{\partial\xi'} = \vartheta - \vartheta',\end{cases} \quad (57)$$

где $\xi = \dfrac{kL'}{C}x;\ \xi' = \dfrac{kL}{C'}x'$ - безразмерные переменные; C и C' - теплоёмкости массовых расходов теплоносителей; k - коэффициент теплопередачи.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (57) формально совпадает с рассматриваемой системой уравнений для распределения температур в регенераторах (9) при соответственно изменённом смысле переменных, если:

а) вместо температуры насадки Θ используется температура ϑ';

б) вместо введённого приведённого времени η используется безразмерная переменная ξ'.

Следовательно, в этом случае будет справедливо точное аналитическое решение для первоначального разогрева насадки регенератора, полученное в п. 2 настоящей работы - (37), (38) или (39), - естественно, при соответственном вышеуказанном изменении смысла переменных:

$$\vartheta = \vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-\xi'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi'^m}{\left(m!\right)^2} \frac{\xi^{n+1}}{\left(n+1\right)}; \tag{58}$$

$$\vartheta' = \vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi^m}{\left(m!\right)^2} \frac{\xi'^{n+1}}{\left(n+1\right)}; \tag{59}$$

$$\vartheta' = \vartheta_1 - e^{-\xi'} \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi'^{m+1}}{m!(m+1)!} \frac{\xi^{n+1}}{\left(n+1\right)}\right). \tag{60}$$

Полученные точные аналитические решения задачи о распределении температур в перекрёстно-точном регенераторе при чисто перекрёстном токе (58)-(60) обладают перед существующими приближёнными решениями всеми теми же преимуществами, указанными в п. 2 настоящей работы.

В работе [Nußelt, 1930], а также в [Хаузен, 1981], приводится решение вышеуказанной задачи, полученное на основании решения интегральных уравнений:

$$\frac{\vartheta - \vartheta'_1}{\vartheta_1 - \vartheta'_1} = 1 - e^{-(\xi+\xi')} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!}; \tag{61}$$

$$\frac{\vartheta' - \vartheta'_1}{\vartheta_1 - \vartheta'_1} = 1 - e^{-(\xi+\xi')} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!}. \tag{62}$$

Вышеприведённые решения (61)-(62) эквивалентны полученным решениям (58)-(60). Чтобы убедиться в эквивалентности выражений (61) с (58), необходимо отнять от левой и правой частей выражения (61) единицу, тогда выражение в левой части (61) будет равным $\dfrac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_1 - \vartheta'_1}$, т.е. таким же, что и в выражении (58) (эквивалентность выражений (58) и (59) доказана в п. 1 данной работы).

В рамках данного исследования были проведены также численные расчёты по формулам (61) и (62) для широкого диапазона определяющих параметров ξ и ξ', которые полностью совпали с расчётами по точным решениям (58)-(60), при условии равности погрешности вычислений.

Сопоставление точных решений (61)-(62) с решениями в квадратурах позволяет получить новые выражения для интегралов:

$$\int_0^{\xi} e^{-(\xi+\xi')} J_0\left[2i\sqrt{\xi\xi'}\right] d\xi = e^{-(\xi+\xi')} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!}; \tag{63}$$

$$\int_0^{\xi'} e^{-(\xi+\xi')} J_0\left[2i\sqrt{\xi\xi'}\right] d\eta = 1 - e^{-(\xi+\xi')} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!}. \tag{64}$$

Последнее выражение можно преобразовать с целью получения наиболее компактного выражения и получения того же вида, что и в выражении (63) путём изменения порядка суммирования переменных:

$$1 - e^{-(\xi+\xi')} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!} = e^{-(\xi+\xi')} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\xi'^n}{n!} \frac{\xi^m}{m!}. \tag{65}$$

Численные расчёты, проведённые в рамках данной работы для широкого диапазона определяющих параметров ξ и ξ', полностью подтверждают приведённые преобразования.

Следовательно, самой компактной записью точных аналитических решений исходной системы уравнений в частных производных для задачи о распределении температур в перекрёстно-точном регенераторе при чисто перекрёстном токе следует признать следующую:

$$\vartheta = \vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-(\xi+\xi')} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\xi^n}{n!} \frac{\xi'^m}{m!}; \tag{66}$$

$$\vartheta' = \vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-(\xi+\xi')} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\xi'^n}{n!} \frac{\xi^m}{m!}. \tag{67}$$

Другой формой записи выражений (66)-(67) может быть предложена запись, в которой нет двойных рядов, но в которой имеют место специальные функции:

$$\vartheta = \vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n, \xi'\right)}{\left(n-1\right)!^2} \frac{\xi^n}{n}; \tag{68}$$

$$\vartheta' = \vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-\xi'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n,\xi\right)}{\left(n-1\right)!^2} \frac{\xi'^n}{n}, \tag{69}$$

где $\Gamma(a,y) = \int\limits_y^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$ - неполная гамма-функция.

Эквивалентность полученных новых выражений с выведенными ранее и независимое согласование их посредством численных расчётов, проведённых в рамках данной работы, служит дополнительной верификацией их истинности.

Полученные выше точные аналитические решения для ϑ и ϑ' позволяют детерминировать значения ϑ_2 и ϑ'_2 согласно уравнениям [Там же]:

$$\vartheta_2 = \frac{C'}{kF} \int\limits_0^{\frac{kF}{C'}} \vartheta\Big|_{\xi=\frac{kF}{C}} d\xi'; \tag{70}$$

$$\vartheta'_2 = \frac{C}{kF} \int\limits_0^{\frac{kF}{C}} \vartheta'\Big|_{\xi'=\frac{kF}{C'}} d\xi. \tag{71}$$

Для расчёта ϑ_2 и ϑ'_2 следует воспользоваться решениями для ϑ и ϑ', полученными в рамках данной работы (58)-(59) или (66)-(67). Для точных решений в форме (58)-(59) получим:

$$\vartheta_2 = \frac{C'}{kF} \int\limits_0^{\frac{kF}{C'}} \left(\vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi^m}{\left(m!\right)^2} \frac{\xi'^{n+1}}{\left(n+1\right)} \right) d\xi' = \tag{72}$$

$$= \frac{C'}{kF} \int\limits_0^{\frac{kF}{C'}} \left(\vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\xi'^p}{p!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi'^m}{\left(m!\right)^2} \frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)} \right) d\xi' =$$

$$= \frac{C'}{kF} \int\limits_0^{\frac{kF}{C'}} \left(\vartheta_1 - \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\xi'^{m+p}}{\left(m!\right)^2 p!} \frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)} \right) d\xi' =$$

$$= \vartheta_1 - \frac{\left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)}{\left(\frac{kF}{C'}\right)} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{m+p+1}}{\left(m!\right)^2 p! \left(m+p+1\right)} \frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)};$$

$$\vartheta'_2 = \frac{C}{kF} \int\limits_0^{\frac{kF}{C}} \left(\vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi^m}{\left(m!\right)^2} \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)} \right) d\xi =$$

$$= \frac{C}{kF} \int\limits_0^{\frac{kF}{C}} \left(\vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\xi^p}{p!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!} \frac{\xi^m}{\left(m!\right)^2} \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)} \right) d\xi = \tag{73}$$

$$= \frac{C}{kF} \int\limits_0^{\frac{kF}{C}} \left(\vartheta'_1 + \left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right) \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\xi^{m+p}}{\left(m!\right)^2 p!} \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)} \right) d\xi =$$

$$= \vartheta'_1 + \frac{\left(\vartheta_1 - \vartheta'_1\right)}{\left(\frac{kF}{C}\right)} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{m+p+1}}{\left(m!\right)^2 p! \left(m+p+1\right)} \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)}.$$

Аналогичный подход к решениям (66)-(67) даёт следующие точные решения, тождественные (72)-(73):

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - \frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\left(\frac{kF}{C'}\right)} e^{-\frac{kF}{C}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^p \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{m+p+1}\left(\frac{kF}{C}\right)^{n}}{n!\,p!\,m!(m+p+1)}; \tag{74}$$

$$\vartheta'_2 = \vartheta_1 + \frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\left(\frac{kF}{C}\right)} e^{-\frac{kF}{C'}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^p \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{n}\left(\frac{kF}{C}\right)^{p+m+1}}{n!\,p!\,m!(m+p+1)}. \tag{75}$$

Средняя разность температур между теплоносителями при чисто перекрёстном токе $\Delta\vartheta_M = (\vartheta - \vartheta')_M$ будет равно, согласно [Там же]:

$$\Delta\vartheta_M = \frac{1}{\left(\frac{kF}{C}\right)}(\vartheta_1 - \vartheta_2). \tag{76}$$

Следовательно, точное аналитическое выражение для $\Delta\vartheta_M$ примет вид при использовании решения вида (72):

$$\Delta\vartheta_M = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\left(\frac{kF}{C}\right)\left(\frac{kF}{C'}\right)} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{m+p+1}}{(m!)^2\,p!(m+p+1)} \frac{\left(\frac{kF}{C}\right)^{n+1}}{(n+1)}, \tag{77}$$

а при использовании решения вида (74) -

$$\Delta\vartheta_M = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\left(\frac{kF}{C}\right)\left(\frac{kF}{C'}\right)} e^{-\frac{kF}{C}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^p \frac{\left(\frac{kF}{C'}\right)^{m+p+1}\left(\frac{kF}{C}\right)^{n}}{n!\,p!\,m!(m+p+1)}. \tag{78}$$

Точные аналитические решения (77) или (78) позволяют напрямую детерминировать среднюю разность температур между теплоносителями при чисто перекрёстном токе $\Delta\vartheta_M$, если известны значения ϑ_1 и ϑ'_1 , а также.

Для случая детерминирования $\Delta\vartheta_M$ по температурам на входе и выходе - ϑ_1 и ϑ_2 - следует воспользоваться тем, что количество теплоты, передаваемое в единицу времени во всём теплообменнике равно [Там же]:

$$\dot{Q} = C(\vartheta_1 - \vartheta_2) = C'(\vartheta'_2 - \vartheta'_1) = kF\Delta\vartheta_M . \tag{79}$$

Следовательно, значения $\left(\frac{kF}{C}\right)$ и $\left(\frac{kF}{C'}\right)$ можно выразить через ϑ_1, ϑ_2, $\Delta\vartheta_M$:

$$\left(\frac{kF}{C}\right) = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}; \tag{80}$$

$$\left(\frac{kF}{C'}\right) = \frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}. \tag{81}$$

Трансцендентное уравнение для детерминирования $\Delta\vartheta_M$ по температурам ϑ_1 и ϑ_2 (а также по температурам ϑ'_1 и ϑ'_2) будут выглядеть следующим образом при использовании точного аналитического решения вида (77):

$$\Delta\vartheta_M = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}\right]\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+1}}{(m!)^2\,p!(m+p+1)} \frac{\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{n+1}}{(n+1)}, \tag{82}$$

после сокращений получим:

$$1 = (\vartheta_1 - \vartheta'_1) \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\left[(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)\right]^{m+p}\left[(\vartheta_1 - \vartheta_2)\right]^{n}}{(m!)^2\,p!(m+p+1)(n+1)} \left[\frac{1}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+n+1}; \tag{83}$$

а при использовании точного аналитического решения вида (77) -

$$\Delta\vartheta_M = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}\right]\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]} e^{-\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}} \times \times \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^p \frac{\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+1} \left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{n}}{n!\,p!\,m!\,(m+p+1)}. \quad (84)$$

что после аналогичных сокращений примет вид:

$$1 = (\vartheta_1 - \vartheta'_1) e^{-\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\Delta\vartheta_M}} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (-1)^p \frac{\left[(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)\right]^{m+p} \left[(\vartheta_1 - \vartheta_2)\right]^{n-1}}{n!\,p!\,m!\,(m+p+1)} \left[\frac{1}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+n}. \quad (85)$$

В некоторых работах, список которых приведён в [Там же], а также в самой монографии [Там же], предлагается решать вышеуказанное уравнение в относительных величинах, что удобно для наглядного представления результатов в виде диаграмм (номограмм). Для этого случая уравнения (82)-(83) примут вид:

$$1 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m+p}}{(n-m)!} \frac{\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}\right]^{m+p}}{(m!)^2\, p!\,(m+p+1)} \frac{\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}\right]^{n} \left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+n+1}}{(n+1)}, \quad (86)$$

а при использовании точного аналитического решения вида (77) -

$$1 = e^{-\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}\right]\left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^p \frac{\left[\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}\right]^{m+p} \left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}\right]^{n-1} \left[\frac{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}{\Delta\vartheta_M}\right]^{m+p+n}}{n!\,p!\,m!\,(m+p+1)}. \quad (87)$$

Численный расчёт $\Delta\vartheta_M$ по относительным величинам $\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}$ и $\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}$, проведённый по формулам (86)-(87), показывает, что он очень хорошо коррелирует с данными работ, приведённых в [Там же], но имеет перед последними неоспоримое преимущество по точности.

Здесь нелишним будет напоминание о том, что расчёт $\Delta\vartheta_M$ без использования вышеуказанных относительных величин - $\frac{\Delta\vartheta_M}{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$; $\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}$; $\frac{(\vartheta'_2 - \vartheta'_1)}{(\vartheta_1 - \vartheta'_1)}$ - по формулам (83) и (85) будет точнее, чем при их использовании.

Использование вышеупомянутых относительных величин, однако, обладают наглядностью получаемых решений, поскольку снижают количество определяющих параметров с четырёх до двух, для которых можно построить соответствующие диаграммы (номограммы).

5. Основные выводы

Резюмируя, можно сказать, что в данном исследовании были получены точные аналитические решения задачи о полном распределении температур вплоть до концов регенератора с высокотеплопроводной насадкой, имеющей как одинаковую, так и произвольно заданную, начальную температуру (задача анцелиуса-hуссельта).

Решения при одинаковом начальном распределении температуры насадки регенератора при соответствующем изменении смысла переменных детерминируют распределение температур в чисто перекрёстноточном регенераторе, т.е. Представляют собой точное аналитическое решение задачи о полном распределении температур в перекрёстно-точном рекуператоре при чисто перекрёстном токе, в том числе позволяют напрямую детерминировать среднюю разность температур между теплоносителями.

Для этого случая была также получена новая, наиболее компактная, форма точных аналитических решений.

Вышеприведённые точные аналитические решения имеют неоспоримое преимущество перед существующими численными, поскольку выявляют имманентную связь между определяющими и определяемыми параметрами; ими можно непосредственно воспользоваться при расчёте, не прибегая к помощи диаграмм (номограмм) или вычислительной техники.

Список литературы

1. **Галицейский Б. М., Дрейцер Г. А.** Нестационарное поле температур стенки трубы и теплоносителя при малых значениях критерия Bi // Известия вузов. Авиационная техника. 1970. № 2. С. 90-98.
2. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
3. **Лобанов И. Е.** Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Известия вузов. Авиационная техника. 2008. № 2. С. 37-40.
4. **Лобанов И. Е.** Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Тезисы докладов и сообщений VI Минского международного форума по тепломассообмену. Минск, 2008. Т. 1. С. 122-124.

5. **Лобанов И. Е.** Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Труды IV Российской национальной конференции по теплообмену: в 8 т. М.: МЭИ, 2006. Т. 2. Вынужденная конвекция однофазной жидкости. С. 187-190.
6. **Лобанов И. Е.** Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Труды VI Минского международного форума по тепломассообмену. Минск, 2008. Секция № 1. Конвективный тепломассообмен. Доклад № 1-40. С. 1-8.
7. **Нестационарный теплообмен** / В. К. Кошкин, Э. К. Калинин, Г. А. Дрейцер, С. А. Ярхо. М.: Машиностроение, 1973. 328 с.
8. **Теория тепломассообмена** / под ред. А. И. Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 683 с.
9. **Хаузен Х.** Теплопередача при противотоке, прямотоке и перекрёстном токе. М.: Энергоиздат, 1981. 384 с.
10. **Anzelius A.** Über Erwärmung vermittels durchströmender Medien // Z. angew. Math. Mech. 1926. Bd. 6. S. 291.
11. **Kalinin E. K., Dreitser G. A.** Unsteady convective heat transfer in channels // Advances in heat transfer. New York: Academic Press, 1994. V. 25. P. 1-150.
12. **Nußelt W.** Der Wärmeübergang im Kreuzstrom // Z. VDI. 1911. Bd. 55. S. 2021-2024.
13. **Nußelt W.** Die Theorie des Winderhitzers // Z. VDI. 1927. Bd. 71. S. 85.
14. **Nußelt W.** Ein neue Formel für den Wärmeübergang Kreuzstrom // Techn. Mech. u. Therm. 1930. Bd. 1. S. 417-422.
15. **Schumann T. E. W.** Heat transfer: a liquid flowing through a porous prism // J. Franklin Inst. 1929. V. 208. P. 405.

О ТОЧЕЧНЫХ АТТРАКТОРАХ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Ляпин Андрей Сергеевич
МАТИ им. Циолковского

Ниже исследуется поведение решений уравнения реакции-диффузии в $^{\circ\,n}$ при $t\to\infty$. Предполагается, что реакция идёт на замкнутой области Ω, компактной в $^{\circ\,n}$. На дополнении множества Ω до $^{\circ\,n}$ рассматриваемое уравнение совпадает с линейным уравнением диффузии. Цель настоящей работы – доказать сходимость решений при $t\to\infty$ к стационарным решениям. Те из них, которые являются предельными для решений основного уравнения, имеют ряд интересных свойств, изучение которых также является предметом настоящей работы.

Изучаемое уравнение и начальное условие для него имеет следующий вид:

$$u_t + f(u;x) = \Delta u, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0 \in H_0^1 \cap L_P(\Omega). \tag{2}$$

где $x\in{}^{\circ\,n}$ и $f(v;x)\neq 0$, если $x\in\Omega$ и $f(v;x)=0$, когда $x\notin\Omega$. Функция $f(v;x)$ может, например, иметь вид $f(v;x)=f(v)\chi_\Omega(x)$, где χ_Ω – характеристическая функция множества Ω. При этом, $f(v;x)= f(v)$ если $x\in\Omega$, и $f(v;x)=0$ в противном случае. Предполагается, что $f(v;x)$ непрерывна по v и удовлетворяет условиям:

$$C_1|v|^p - C_2 \le f(v;x)\, v \le C_3|v|^p + C_4 \tag{3}$$

$$\frac{\partial f(v;x)}{\partial v} \ge -C. \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial f(v;x)}{\partial v}\right| \le C\,|v|^{p-2} \tag{5}$$

Рассматривается семейство функций $u^{(M)}(x;t)$, являющихся решениями задачи.

$$u_t^{(M)} + f(u^{(M)};x) = \Delta u^{(M)};\ x\in B_M,\ u^{(M)}\big|_{t=0} = u_0,\ u^{(M)}\big|_{\partial B_M} = 0, \tag{6}$$

где, в отличие от (1), (2) $x\in B_M$ - шару радиуса $M_0 + M$, с центром $x=0$. Число M_0 такое, что шар радиуса M_0 с центром в $x=0$ включает в себя Ω. Такой выбор M_0 возможен, так как Ω компакт в $^{\circ\,n}$. Очевидно, что шар B_{M_1} вложен в B_{M_2}, если только $M_1 \le M_2$. Имеет место следующее утверждение.

<u>Утверждение 1</u>: Для любых $T>0$, $\tau\in(0;T)$ и $k\ge 0$ существует $s\in[0;\tau)$ такое, что $u^{(M)}(x;t)$ и $u_t^{(M)}$ равномерно по M ограничены в $L_\infty([s;T];\ L_{k+2}(B_M)) \cap L_2([s;T];H^1(B_M))$.

Здесь пространство $H^1(B_M)$ определяется своей нормой:

$$||u||^2 = \int_{B_M} (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx$$

<u>Доказательство</u>: Умножим (6) на $u_t^{(M)}$ и проинтегрируем по x на B_M:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\nabla u^{(M)}\|^2_{L_2(B_M)} + \int_\Omega F(u^{(M)};x)d^n x\Big) + \|u_t^{(M)}\|^2_{L_2(B_M)} = 0\,. \tag{7}$$

Отсюда следует, что:

$$\Big(\frac{1}{2}\|\nabla u^{(M)}\|^2_{L_2(B_M)} + \int_\Omega F(u^{(M)};x)d^n x\Big)\Bigg|_0^T + \int_0^T \|u_t^{(M)}\|^2_{L_2(B_M)}dt = 0\,. \tag{8}$$