МЕТОД МОДУЛЯРНЫХ МАЖОРАНТ НА ПОРЯДКОВОМ ОТРЕЗКЕ

Слугин Сергей Николаевич, Кротов Николай Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

1. Широкий класс задач для нелинейных дифференциальных уравнений в обыкновенных или частных производных может быть представлен в операторной форме

$$Dy = F(y), \ \ Ny = z, \tag{1}$$

где главная линейная часть Dy содержит старшие производные, а второе равенство означает начальные или (и) краевые условия. Требования к нелинейной части F обычно указываются на метрическом шаре. Но при конкретизации операторной схемы в классе дифференциальных уравнений они выражаются через модули функций (например, условие Липшица). Поэтому целесообразно в общей схеме, выполненной в терминах функционального анализа, использовать пространства, элементы которых имеют модули.

Здесь условия выставлены не на метрическом шаре, а на порядковом отрезке. Это приводит к существенному ослаблению требований к операции F и, следовательно, к расширению класса задач типа (1), к которым может быть применен, например, модифицированный принцип сжимающих отображений. Улучшается и становится гораздо детальнее оценка погрешности приближения, так как она выражается через элементы, а не числа.

2. Напомним некоторые известные понятия. Линейное пространство (ЛП) называется частично упорядоченным (ч.у.), если в нем выделено множество элементов $x > 0$, причем $(x, y > 0, \ c > 0) \Rightarrow (x \neq 0, \ x + y > 0, \ cx > 0)$. Сравнимость $x > y, \ y < x$ означает $x - y > 0$.

Пусть $X, Y -$ ч.у. ЛП. Линейный оператор $A: X \to Y$ называется положительным, если $(x > 0) \Rightarrow (Ax \geq 0), \ \exists x > 0: \ Ax > 0$.

Если в ч.у. ЛП X конечное множество имеет верхнюю грань, то X называется полуупорядоченным, в нем элементы x имеют модули $|x| = x \vee (-x)$.

По определению, порядковый отрезок $[x, z] = \{y: \ x \leq y \leq z\}$. В частности,

$$\{x: \ |x - x_0| \leq r\} = [x_0 - r, x_0 + r]. \tag{2}$$

Если норма изотонна: $(|x| \leq |y|) \Rightarrow (\|x\| \leq \|y\|)$, то полуупорядоченное $B -$ пространство называется $KB -$ линеалом [Вулих, 1961, с. 195]. Очевидно, линейное подпространство $KB -$ линеала является ч.у. ЛНП.

3. Применим метод, указанный в названии статьи, к уравнению

$$x = S(x). \tag{3}$$

Пусть $X - \ KB -$ линеал, множество $E_0 \subset X$, операция $S: E_0 \mapsto X$ имеет модулярную мажоранту [Там же, с. 361]:

$$|S(x + \Delta) - S(x)| \leq A|\Delta| \quad (x, x + \Delta \in E_0), \tag{4}$$

где линейный ограниченный положительный оператор

$$A: X \to X, \ \ \|A^n\| \leq a_n \ \ (n \geq 1), \ \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \tag{5}$$

Следовательно, существует линейный ограниченный положительный обратный оператор $(I - A)^{-1}: X \to X$, где $Ix \equiv x$.

Выбран элемент $x_0 \in E_0$. Обозначим

$$\delta = |x_0 - S(x_0)|, \ \ r = (I - A)^{-1}\delta.$$

Теорема 1. *Если множество E_0 содержит в себе порядковый отрезок (2), то на множестве E_0 существует и единственно решение x^* уравнения (3), процесс*

$$x_n = S(x_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

сходится на порядковом отрезке (2) к решению. Оценка погрешности

$$|x_n - x^*| \leq A^n r \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

4. Применим Теорему 1 к задаче (1). Дифференцируемые функции при поточечном смысле сравнимости не составляют полуупорядоченного пространства, но являются элементами его линейного подпространства.

Пусть $X - \ KB -$ линеал; $Y -$ линейное подпространство в X; $Z -$ линейное пространство. Линейные операторы $D: Y \to X, \ N: Y \to Z$. Указан элемент $z \in Z$.

Введем линейное подпространство

$$M = \{y: \ y \in Y, \ Ny = 0\}.$$

Пусть оператор D устанавливает биекцию $M \leftrightarrow X$, то есть задача

$Dy = x,\ Ny = 0$

имеет единственное решение $D^{-1}x \in M$ при любой правой части $x \in X$. Пусть известно решение $\tilde{y} \in Y$ задачи

$Dy = x,\ Ny = z$

при $x \in X$ имеет вид

$$y = \tilde{y} + D^{-1}x. \tag{6}$$

Указано множество E некоторых элементов $y \in Y$, удовлетворяющих равенству $Ny = z$. Операция $F : E \mapsto X$.

Введем подстановку, множество и операцию:

$x = Dy,\ E_0 = D(E),\ S(x) = F(\tilde{y} + D^{-1}x).$

Тогда задача (1) на множестве E сводится к уравнению (3) на множестве E_0 и восстановлению элемента y по формуле (6).

Пусть операции D^{-1}, F имеют модулярные мажоранты:

$\left|D^{-1}x\right| \le B|x|\ \ (x \in X),\ \ \left|F(y+\Delta) - F(x)\right| \le \Gamma|\Delta|\ \ (y, y+\Delta \in E),$

где линейные ограниченные положительные операторы $B : X \to M,\ \Gamma : M \to X$.

Введем композицию

$A = \Gamma B$

(тогда имеет место сравнимость (4)). Пусть выполняются условия (5).

Выбран элемент $y_0 \in E$ и введено обозначение

$\delta = \left|Dy_0 - F(y_0)\right|$

и прежнее обозначение r. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если множество E содержит в себе множество*

$$\{y : y \in Y, Ny = z, \left|D(y - y_0)\right| \le r\}, \tag{7}$$

то на множестве E существует и единственно решение y^* задачи (1), процесс

$x_n = F(y_{n-1}),\ y_n = \tilde{y} + D^{-1}x_n\ \ (n \ge 1)$

сходится на множестве (7) к решению: $y_n \to y^*$ вместе с образом $x_n = Dy_n \to Dy^*$. Порядковая оценка погрешности приближения:

$\left|D(y_n - y^*)\right| \le A^n r \to 0,\ \left|y_n - y^*\right| \le BA^n r \to 0.$

5. В качестве примера конкретизируем теорему 2 в случае задачи

$$y''(t) = f(t, x(t)),\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta\ \ (0 \le t \le b) \tag{8}$$

Обозначение $(f[y])(t) = f(t, x(t))$. Положим

$X = C,\ Y = C^2,\ Z = R^2,\ Dx = x'',\ F(y) = f[y],\ Ny = \{y(0), y'(0)\},\ z = \{\alpha, \beta\}.$

Сравнимость $x > 0 :\ x(t) \ge 0,\ \forall t;\ \exists t > 0 :\ x(t) > 0$. Выделено множество E некоторых функций $y \in Y$, удовлетворяющих данным начальным условиям. Пусть

$(y \in E) \Rightarrow (f[y] \in X),\ \left|f[y+\Delta] - f[y]\right| \le c|\Delta|\ \ (y, y+\Delta \in E).$

Выбрана функция $y_0 \in E$. Модуль невязки

$\delta(t) = \left|y_0''(t) - f(t, y_0(t))\right|.$

Положим $\Gamma\Delta = c\Delta,\ B = D^{-1}$. Тогда

$(Ax)(s) = c\int_0^s (s-t)x(t)dt.$

Последний интеграл является результатом второй итерации оператора интегрирования $\int_0^s x(t)dt$. Поэтому $n-$ая итерация оператора A является $2n-$ой итерацией оператора $\sqrt{c}\int_0^s x(t)dt$. Используя формулу Коши $m-$повторного интегрирования при $m = 2n$ с переменным верхним пределом интегрирования, а также равенство $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$, устанавливаем соотношения

$$(A^n\delta)(s) = \frac{c^n}{(2n-1)!}\int_0^s (s-t)^{2n-1}\delta(t)dt,$$

$$r(s) = [(I-A)^{-1}\delta](s) = \delta(s) + \sqrt{c}\int_0^s Sh[\sqrt{c}(s-t)]\delta(t)dt.$$

Из Теоремы 2 следует

Теорема 3. *Если множество E содержит в себе множество*

$$\{y:\ y\in C^2,\ y(0)=\alpha,\ y'(0)=\beta,\ |(y-y_0)''(s)|\le r(s)\}, \tag{9}$$

то на множестве E существует и единственно решение y^* задачи (8), процесс

$$x_n(s)=f(s,y_{n-1}(s)),\ y_n(s)=\alpha+\beta s+\int_0^s (s-t)x_n(t)dt\ \ (n\ge 1)$$

сходится на множестве (9) равномерно вместе с производными к решению:

$$y_n\to y^*,\ y_n'\to y^{*\prime},\ x_n=y_n''\to y^{*\prime\prime}.$$

Оценки погрешности приближения - разности $\Delta_n=y_n-y^*$:

$$|\Delta_n''(s)|\le\varphi_n(s)=\frac{c^n}{(2n-1)!}\int_0^s (s-t)^{2n-1}r(t)dt\to 0,$$

$$|\Delta_n'(s)|\le\psi_n(s)=\int_0^s\varphi_n(t)dt\to 0,\ \ |\Delta_n|\le\int_0^s\psi_n(t)dt\to 0\ \ (n\to\infty)$$

равномерно.

Обоснование приведенных здесь утверждений содержится в работах [Слугин, Кротов, 2004, с. 77-82], [Слугин, Кротов, 2005, с. 89-98], [Кротов, 2005; 2008].

Список литературы

1. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Гостехиздат, 1961. С. 407.
2. **Кротов Н. В.** Композиция методов линеаризации и аппроксимации операторных, интегральных и дифференциальных уравнений: канд. диссертация. Н. Новгород, 2005. С. 113.
3. **Кротов Н. В.** Метод усреднения и модулярных мажорант для дифференциального уравнения с запаздыванием // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2008. № 6. Математическое моделирование, оптимальное управление. С. 161-164.
4. **Слугин С. Н., Кротов Н. В.** Модифицированный метод усреднения нелинейного уравнения в пространстве с конусом // Известия РАЕН. 2004. № 8. Дифференциальные уравнения. С. 77-82.
5. **Слугин С. Н., Кротов Н. В.** Прямой метод приближенного решения нелинейного уравнения в серии подпространств // Там же. 2005. № 9. С. 89-98.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРОВОДНИКАМИ С УЧЕТОМ ЭКРАНИРОВКИ ИЗБЫТОЧНОГО ПОВЕРХНОСТНОГО ЗАРЯДА

Степанов Анатолий Петрович
Юргинский технологический институт (филиал) Томского политехнического университета

Рассмотрим два проводника в частично ионизированной среде, которые подключены к источнику постоянного напряжения. Предположим, что радиус их одинаковый и равен r. Расстояние между осями проводников обозначим через l. Предположим, что через данные проводники протекает одинаковый ток I. Необходимо оценить силу взаимодействия между проводниками. Такая задача возникает, например, при анализе процессов в межэлектродном промежутке при возбуждении электрической дуги.

На каждом из проводников находится избыточный поверхностный заряд. Поэтому кроме магнитной силы притяжения $F_м$ необходимо учитывать и электрическую силу, возникающую из-за наличия поверхностного заряда на проводниках.

Обе силы направлены в противоположные стороны. Электрическая сила обуславливает отталкивание проводов (из-за одноименного знака поверхностного заряда), магнитная - их притяжение (вследствие протекания тока в одном направлении).

Величина отношение этих сил [1]:

$$\frac{F_м}{F_э}=\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\frac{\ln^2 {}^{l}\!/\!{}_{r}}{\pi^2 R^2}, \tag{1}$$

где $F_м$ - магнитная сила, $F_э$ - электрическая сила; ε_0 - электрическая постоянная, $\varepsilon_0 = 0{,}885\cdot10^{-11}$ Ф/м; μ_0 - магнитная постоянная, $\mu_0 = 1{,}257\cdot10^{-6}$ Гн/м; R - сопротивление проводников.

Результирующая сила взаимодействия обращается в нуль, когда последнее отношение равно единице. Это будет при некотором сопротивлении проводников, которое обозначим через R_0, где

$$R_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\cdot\frac{\ln {}^{l}\!/\!{}_{r}}{\pi}. \tag{2}$$

Если $R < R_0$, то $F_м > F_э$ - проводники притягиваются, если $R > R_0$, то $F_м < F_э$ - провода отталкиваются.

Однако, оценивая взаимодействие между двумя параллельными проводниками в частично ионизированной среде нужно учесть факт экранировки избыточного поверхностного заряда ионами.