

Ипатов Дмитрий Евгеньевич

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ТРЕХМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/1-1/3.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2010. № 1 (32): в 2-х ч. Ч. I. С. 14-16. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/1-1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 551.465

Дмитрий Евгеньевич Ипатов

Московский физико-технический институт

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ТРЕХМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ[©]

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы

Вопросы моделирования трехмерной гидротермодинамики океана до сих пор остаются сложными и малоизученными. В [1, 2] была предложена постановка начально-краевой задачи для модели с условием свободной поверхности на верхней границе области, при которой гарантируется существование решений на любом конечном промежутке времени. Используемые при этом нелинейные граничные условия затрудняют разработку вычислительных алгоритмов для решения задачи. В настоящей работе рассматриваются подходы к построению таких алгоритмов.

Рассмотрим сферическую систему координат (x, y, r) , где $x \in [0, 2\pi]$ - долгота, увеличивающаяся на восток, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$ - широта, растущая с юга на север, r - радиальное расстояние. Обозначим через Ω' область в плоскости переменных (x, y) с кусочно-гладкой границей Γ' , R - радиус Земли, O_{xy} - образ точки (x, y) при отображении на сферу S_R^2 радиуса R , $\Omega = \{O_{xy}, (x, y) \in \Omega'\}$ - открытое подмногообразие, получаемое в результате отображения Ω' на сферу радиуса R , $\Gamma = \{O_{xy}, (x, y) \in \Gamma'\}$ - граница Ω . Будем считать, что замыкание Ω не содержит полюсов, то есть на $\bar{\Omega}'$ верно неравенство $\cos y \geq \cos y_0 > 0$.

Пусть $z = R - r$ - вертикальная координата, направленная вниз, $H(x, y)$ - строго положительная непрерывно дифференцируемая функция, описывающая рельеф дна, $0 < H_0 \leq H(x, y) \leq H_{\max}$ на $\bar{\Omega}'$, $G = \{O_{xy} \times (0, H(x, y)), (x, y) \in \Omega'\}$ - трехмерная область, определяемая условием $0 < z < H(x, y)$ в каждой точке $O_{xy} \in \Omega$, $\Sigma = \{O_{xy} \times [0, H(x, y)], (x, y) \in \Gamma'\}$ - боковая граница G , t - временная переменная, $t \in [0, t_1]$, где $0 < t_1 < +\infty$, $G_{t_1} = G \times (0, t_1)$, $D = \Omega \times (0, t_1)$.

Единичные векторы в направлении x, y, z обозначим соответственно через e_x, e_y, e_z , тогда вектор скорости записывается в форме $\mathbf{U} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z = (u, v, w) \equiv (\mathbf{u}, w)$, где $u = R\dot{x} \cos y$, $v = R\dot{y}$, $w = \dot{z}$.

Введем следующие дифференциальные операторы

$$\nabla = \left(m \frac{\partial}{\partial x}, n \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad m = \frac{1}{R \cos y}, \quad n = \frac{1}{R}; \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = m \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{n}{m} v \right), \quad \operatorname{Div} \mathbf{U} = \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = um \frac{\partial}{\partial x} + vn \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta = m^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + mn \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{n}{m} \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad A = - \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$A_u = A_v = A$, где под A понимаются компоненты скорости u, v , температура T и солёность S ; ρ, μ, ν - положительные постоянные, $u = v = 0$, $u = v = 0$.

В последующем через $l = l(y)$ обозначается параметр Кориолиса, $l = 2\Omega \sin y$, где Ω - угловая скорость вращения Земли, а так же $f_C = l + mu \sin y$, $B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -f_C \\ f_C & 0 \end{pmatrix}$.

В области G_{t_1} рассмотрим систему уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики [1, 2]:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (A + B(u))\mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \hat{\mathbf{f}}, \quad (1)$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g, \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \quad (4)$$

$$= (T, S), \quad (5)$$

где $\hat{f}$, f_T , f_S - заданные функции источников, P - давление, ρ - плотность, $\rho_0 = \text{const} > 0$ - осредненное значение плотности, g - ускорение свободного падения, (T, S) - положительная непрерывная по Липшицу функция,

$$|(T_1, S_1) - (T_2, S_2)| \leq L \sqrt{(T_1 - T_2)^2 + (S_1 - S_2)^2} \quad \forall T_1, T_2, S_1, S_2 \in \mathbf{R} \quad (6)$$

Заметим, что условие (6) не противоречит формулам, используемым при численном моделировании. Полученные эмпирическим путем параметризации плотности верны в некотором физически значимом диапазоне

$$\Pi = \{T_{\min} \leq T \leq T_{\max}, S_{\min} \leq S \leq S_{\max}\}$$

тех значений температуры и солености, которые встречаются в океане. На множестве Π плотность (T, S) может быть задана как полином или какая-либо другая непрерывно дифференцируемая функция. Тогда (T, S) будет непрерывной по Липшицу на Π в силу ограниченности этого множества. Вне компакта Π доопределим (T, S) так, чтобы выполнялось (6).

На верхней границе при $z=0$ ставятся условия $P = P_{\text{atm}} + g \rho_0$, $w = -\partial \eta / \partial t + Q_w$, где P_{atm} - заданное давление на поверхности, $\eta = \eta(x, y, t)$ - возвышение уровня поверхности океана относительно невозмущенного состояния $z=0$, направленное противоположно оси z , Q_w - заданный поток влаги с поверхности. На дне при $z=H(x, y)$ ставится условие $w = \mu u \partial H / \partial x + \nu v \partial H / \partial y$. Из граничных условий по вертикали и уравнения неразрывности (2) имеем

$$w = w(\mathbf{u}) = \int_z^H \text{div} \mathbf{u} dz' + (\mu u \frac{\partial H}{\partial x} + \nu v \frac{\partial H}{\partial y})|_{z=H} = \text{div} \int_z^H \mathbf{u} dz' \quad (7)$$

Кроме того, уравнение гидростатики (3) запишем в виде $P = P_{\text{atm}} + g \rho_0 + g \int_0^z \rho dz'$, тогда $\nabla P = \nabla P_{\text{atm}} + g \rho_0 \nabla \eta + g \nabla \int_0^z \rho dz'$. Обозначив через $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} - \nabla P_{\text{atm}} / \rho_0$, преобразуем исходную систему (1) - (5) к виду

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (A + B(u))\mathbf{u} + g \nabla \eta + g / \rho_0 \nabla \int_0^z \rho dz' = \mathbf{f}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + \text{div} \int_0^H \mathbf{u} dz = Q_w, \quad (9)$$

$$\frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \quad (10)$$

где функция $w = w(\mathbf{u})$ в операторе полной производной по времени d/dt вычисляется согласно (7).

Систему (8)-(10) дополним начальными условиями

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \eta = \eta^0, \quad T = T^0, \quad S = S^0 \quad \text{при } t=0 \quad (11)$$

и граничными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\frac{w(\mathbf{u})}{\rho_0} + \frac{w(\mathbf{u})}{2} \mathbf{u} \quad \text{при } z=0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \Gamma_T (T - T_s) + \frac{w(\mathbf{u})}{2} T + Q_T \quad \text{при } z=0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \Gamma_S (S - S_s) + \frac{w(\mathbf{u})}{2} S + Q_S \quad \text{при } z=0, \quad (14)$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_H = 0 \quad \text{при } z=H(x, y), \quad (15)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}_\Sigma} \times \mathbf{n}_\Sigma = \nabla T \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \nabla S \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad (16)$$

где T_s, S_s, Q_T, Q_S - заданные значения напряжения трения ветра, температуры, солёности, потоков тепла и соли на поверхности воды, Γ_T, Γ_S - положительные постоянные, $\mathbf{n}_H, \mathbf{n}_\Sigma$ - векторы нормали к соответствующим поверхностям, $\mathbf{D} = (\nabla, \frac{\partial}{\partial z})$, означает функции u, v, T, S .

При численном решении задачи для простоты рассматривается прямоугольная область Ω' в плоскости угловых переменных (x, y) . Для решения задачи (8) - (16) использоваться полуявная по времени конечно-разностная схема. Обозначим через h шаг сетки по времени, $t_k = kh$, и будем отмечать верхним индексом k функции, относящиеся к моменту $t = t_k$, тогда разностная схема записывается в виде

$$\frac{\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}}{h} + (A + B(\mathbf{u}^{k-1}))\mathbf{u}^k + g\nabla^{k-1} + g / \int_0^z \nabla^{k-1} dz' = \mathbf{f}^k - \mathbf{u}^{k-1} \nabla \mathbf{u}^{k-1} - w^{k-1} \frac{\partial \mathbf{u}^{k-1}}{\partial z}, \quad (17)$$

$$\frac{u^k - u^{k-1}}{h} + \text{div} \int_0^H \mathbf{u}^k dz = 0. \quad (18)$$

$$\frac{T^k - T^{k-1}}{h} + A_T T^k = f_T^k - \mathbf{u}^{k-1} \nabla T^{k-1} - w^{k-1} \frac{\partial T^{k-1}}{\partial z}, \quad (19)$$

$$\frac{S^k - S^{k-1}}{h} + A_S S^k = f_S^k - \mathbf{u}^{k-1} \nabla S^{k-1} - w^{k-1} \frac{\partial S^{k-1}}{\partial z} \quad (20)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial z} = -\frac{u^k}{0} + \frac{w(\mathbf{u}^{k-1})}{2} \mathbf{u}^k \text{ при } z = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial T^k}{\partial z} = \Gamma_T (T^k - T_s) + \frac{w(\mathbf{u}^{k-1})}{2} T^k + Q_T^k \text{ при } z = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial S^k}{\partial z} = \Gamma_S (S^k - S_s) + \frac{w(\mathbf{u}^{k-1})}{2} S^k + Q_S^k \text{ при } z = 0, \quad (23)$$

$$D^k \cdot \mathbf{n}_H = 0 \text{ при } z = H(x, y), \quad (24)$$

$$\mathbf{u}^k \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial \tilde{n}_\Sigma} \times \mathbf{n}_\Sigma = \nabla T^k \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \nabla S^k \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (25)$$

Для решения системы (17) - (25) на каждом шаге по времени используются итерационные алгоритмы и прямые методы, основанные на быстром преобразовании Фурье.

Список литературы

1. Агошков В. И., Ипатова В. М. Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // Доклады Академии наук. 2007. Т. 412. № 2. С. 151-153.
2. Ipatova V. M. Solvability of the ocean hydrothermodynamics problem under a nonlinear state equation // Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling. 2008. V. 23. № 2. P. 185-196.

УДК 532.59

Дмитрий Евгеньевич Ипатов
Московский физико-технический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВОГО ИМПУЛЬСА В ВИДЕ УЕДИНЁННОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ[©]

«Уединенной волной» называется колоколообразный волновой импульс и сохраняющий свою форму при перемещении в пространстве. Функции, описывающие эти объекты, являются решениями нелинейных уравнений математической физики. Например, уравнения Кортевега де Фриза [1-3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$