где , T_s , S_s , Q_T , Q_S - заданные значения напряжения трения ветра, температуры, солености, потоков тепла и соли на поверхности воды, Γ_T , Γ_S - положительные постоянные, $\mathbf{n}_H$, $\mathbf{n}_\Sigma$ - векторы нормали к соответствующим поверхностям, $\mathbf{D} \; = (\; \nabla \; , \; \frac{\partial}{\partial z})$, означает функции u , v , T , S .

При численном решении задачи для простоты рассматривается прямоугольная область Ω' в плоскости угловых переменных (x, y). Для решения задачи (8) - (16) использоваться полуявная по времени конечно-разностная схема. Обозначим через h шаг сетки по времени, $t_k = kh$, и будем отмечать верхним индексом k функции, относящиеся к моменту $t = t_k$, тогда разностная схема записывается в виде

$$\frac{\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}}{h} + (A + B(u^{k-1}))\mathbf{u}^k + g\nabla \;\; ^{k-1} + g / \;\; _0\nabla\int_0^z \;\; ^{k-1} dz' = \mathbf{f}^k - \mathbf{u}^{k-1}\nabla\mathbf{u}^{k-1} - w^{k-1}\frac{\partial \mathbf{u}^{k-1}}{\partial z} , \tag{17}$$

$$\frac{\;^k - \;\;^{k-1}}{h} + div\int_0^H \mathbf{u}^k dz = 0 . \tag{18}$$

$$\frac{T^k - T^{k-1}}{h} + A_T T^k = f_T^k - \mathbf{u}^{k-1}\nabla T^{k-1} - w^{k-1}\frac{\partial T^{k-1}}{\partial z} , \tag{19}$$

$$\frac{S^k - S^{k-1}}{h} + A_S S^k = f_S^k - \mathbf{u}^{k-1}\nabla S^{k-1} - w^{k-1}\frac{\partial S^{k-1}}{\partial z} \tag{20}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial z} = -\frac{\;^k}{\;_0} + \frac{w(\mathbf{u}^{k-1})}{2}\mathbf{u}^k \text{ при } z = 0 , \tag{21}$$

$$_T\frac{\partial T^k}{\partial z} = \Gamma_T(T^k - T_s) + \frac{w(\mathbf{u}^{k-1})}{2}T^k + Q_T^k \text{ при } z = 0 , \tag{22}$$

$$_S\frac{\partial S^k}{\partial z} = \Gamma_S(S^k - S_s) + \frac{w(\mathbf{u}^{k-1})}{2}S^k + Q_S^k \text{ при } z = 0 , \tag{23}$$

$$D^k \;\; \cdot\mathbf{n}_H = 0 \text{ при } z = H(x, y) , \tag{24}$$

$$\mathbf{u}^k \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \frac{\partial \mathbf{u}^k}{\partial \vec{n}_\Sigma} \times \mathbf{n}_\Sigma = \nabla T^k \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \nabla S^k \cdot \mathbf{n}_\Sigma = 0 \text{ на } \Sigma . \tag{25}$$

Для решения системы (17) - (25) на каждом шаге по времени используются итерационные алгоритмы и прямые методы, основанные на быстром преобразовании Фурье.

Список литературы

1. **Агошков В. И., Ипатова В. М.** Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // Доклады Академии наук. 2007. Т. 412. № 2. С. 151-153.
2. **Ipatova V. M.** Solvability of the ocean hydrothermodynamics problem under a nonlinear state equation // Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling. 2008. V. 23. № 2. P. 185-196.

УДК 532.59

Дмитрий Евгеньевич Ипатов
Московский физико-технический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВОГО ИМПУЛЬСА В ВИДЕ УЕДИНЁННОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ©

«Уединенной волной» называется колоколообразный волновой импульс и сохраняющий свою форму при перемещении в пространстве. Функции, описывающие эти объекты, являются решениями нелинейных уравнений математической физики. Например, уравнения Кортевега де Фриза [1-3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{1}$$

Наблюдение «уединенной волны» впервые было выполнено в 1834 году Расселом. При перевозках по каналу использовались баржи, которые тащили лошади. Если баржа неожиданно останавливалась, то уже приведенная в движение масса воды собиралась у ее носа. Потом она оставляла его и начинала катиться вперед, принимая форму одиночного возвышения. Оно имело вид округлого четко-выраженного водяного холма, который двигался вдоль канала практически, не меняя своей формы и не снижая скорости.

Начиная с 1965 года, «уединённые волны» стали называться солитонами, так как выяснилось, что во многом они ведут себя подобно частицам. Решение уравнения типа «уединенная волна» имеет вид:

$$u\,(x,t)=\frac{2\,b^3}{ch^2[b(x-4b^2t)]} \qquad (2)$$

Для волны (1.2) её скорость $V=4b^2$ зависит от амплитуды, равной $2b^2$. При распространении волны по поверхности воды величина $u\,(x,t)$ это высота волны в точке с координатой x в момент времени t.

Тогда значение интеграла вида:

$$I_m=\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,t)\,dx=2b^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ch^2[b(x-4b^2t)]}=b$$

можно интерпретировать как полное количество жидкости под волной (переносимой солитоном).

Будем искать решение в виде функции одной переменной $u=u(\ )$, полагая

$$=a(x-\Omega t)+\Delta, \qquad где\ a,\ \Omega,\ \Delta=const.$$

Функцию (1.2) с использованием переменной можно записать следующим образом:

$$u(\ )=\frac{a^2}{4}\frac{1}{ch^2\left(\frac{-\ _0}{2}\right)}.\ a=2b;\ \Omega=4b;\ \Delta=0;\ и\ _0=0.$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$u_t=\frac{du}{d}\frac{\partial}{\partial t}=(-a\Omega)\,u',\ u_x=au'(\ ),\quad u_{xxx}=a^3u'''(\ ).$$

Подставляя в уравнение (1), получаем

$$(1-\Omega)\,u'-6uu'+a^2u'''=0,$$

интегрируя обе части этого уравнения, получим

$$u(1-\Omega)-3u^2+u''a^2=C.$$

Умножив это уравнение на $2u'$, можно понизить порядок еще на единицу:

$$2uu'(1-\Omega)-6u'u^2+2u'u''a^2=2Cu'\quad u^2(1-\Omega)+2u^3+u'^2a^2=2Cu+D,$$

$$au'=\sqrt{-4u^3-u^2(1-\Omega)+2Cu+D}.$$

Последнее уравнение допускает интегрирование в явном виде

$$a\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{-4u^3-u^2(1-\Omega)+2Cu+D}}=\ -\ _0.$$

Поскольку мы ищем решение типа уединенной волны, ее профиль должен спадать к нулю вдали от возмущения $u(\ )\to 0,\quad x\to\pm\infty$. Оказывается, что это условие удовлетворяется при нулевых константах интегрирования $C=D=0$, а так же при $1-\Omega=-a^2$: $\int_{u_0}^{u}\frac{du}{u\sqrt{a^2-4u}}=\ -\ _0$. Вычисляя интеграл и выразив u через , получим формулу (2) для одиночного солитона.

Более точную модель волн на воде дает уравнение Буссинеска:

$$u_{tt}=\mathrm{v}_S^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u+\frac{3}{2}\frac{u^2}{h}+\frac{h^2}{3}u_{xx}\right) \qquad (3)$$

Здесь h - это глубина в отсутствии возмущения; $v_S = \sqrt{gh}$ - это скорость волны. Уравнение (3) так же допускает решение типа уединенной волны. Оно имеет вид:

$$u = \frac{k}{ch^2\left(\sqrt{\frac{3k}{h^2}}(x \pm v_s t)\right)}$$

Уравнение (3) превращается в уравнение КдФ заменой $= x - vt$ и $= \quad t$ и отбрасыванием членов порядка $O(\quad ^2)$. Если две уединенные волны сталкиваются, то они не разрушаются и не рассеиваются. Они ведут себя частицам. Если в качестве начальных условий взять два существенно разных решения уравнения КдФ, соответствующих двум волнам разной амплитуды, то более высокая волна вскоре нагонит более низкую. Через некоторое время она обгонит ее сохранив первоначальную форму. Это приводит к тому, что энергия может распространяться в виде локализованных в пространстве устойчивых пакетов без рассеяния.

Аналогично ведут себя решения уравнения Буссинеска (3) и решения нелинейного уравнения Шредингера $u_t + u_{xx} - 2|u|^2 u = 0$ (1.4).

Это уравнение описывает огибающие оптических волн в оптоволоконных кабелях. В некоторых волоконных магистралях при переносе цифровой информации наличие солитонного импульса означает 1 и 0 его отсутствие (основное состояние). Использование солитонов при передаче информации на дальнее расстояния позволяет повысить пропускную способность волоконных магистралей более чем в 100 раз.

В открытом океане в результате сдвигов океанического дна при землетрясении может образоваться “уединенная волна”. Длина ее - от 10 до 500 км. Высота такой волны невелика (обычно не более 10 метров). В открытом океане любое судно такую волну просто не заметит. Средняя скорость V “уединенной волны” на поверхности океана оценивается по формуле $V = \sqrt{gh}$, где g - ускорение свободного падения; h - глубина океана. При глубине океана h ~ 1км мы получим V ~ 100 м/сек. При подходе к берегу, “уединенная волна” замедляет свое движение, становясь короче и выше, формируя цунами. Небольшие цунами могут возникнуть и от движения большого корабля. При движении судна со скоростью близкой к $\sqrt{gh}$ около него может образоваться “спутная волна”. При внезапном изменении рельефа дна или замедлении скорости движения корабля она может оторваться. Такая волна, отправившись в самостоятельное путешествие, может наделать немало бед. В океане солитонные волны могут образовываться как на поверхности воды, так и в глубине. Океанские глубины очень неоднородны, в них существуют слои с разной температурой, плотностью и соленостью. Иногда эта граница между двумя слоями оказывается довольно резкой. Такая граница как бы образует поверхность раздела, по которой могут перемещаться “уединенные волны”.

Так как скорость движения звуковых волн в океане на порядок больше (~ 1500 м/сек), то звук, генерируемый при движении “уединенной волны”, может быть принят задолго до подхода самой волны к берегу. Экспериментальные исследования показали, что прием звуковых сигналов возможен на расстоянии до 10 тыс. км. Такое предварительное оповещение о подходе цунами может свести бедственные последствия от таких событий к минимуму.

Список литературы

1. **Захаров В. Е., Шабат А. Б.** Точная теория двумерной самофокусировки и одномерная автомодуляция волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 74. С. 118-134.
2. **Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.** Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. rev. lett. 1967. V. 19. P. 1095-1097.
3. **Zabusky N. J., Kruskal M. D.** Interraction of solutions in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Ibidem. 1965. V. 15. P. 240-243.