

Пыркова Ольга Анатольевна, Онуфриева Нэлли Петровна

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В МОДЕЛИ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/1-1/7.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2010. № 1 (32): в 2-х ч. Ч. I. С. 22-29. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/1-1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

Список литературы

1. Росс Нелсон. Running Visual Basic 3 for Windows / пер. с англ. М.: Издательский отдел «Русская редакция»; ТОО «Channel Trading Ltd.», 1995.
2. Юров В. Assembler. СПб.: Питер, 2002.

УДК 532

Ольга Анатольевна Пыркова, Нэлли Петровна Онуфриева
 ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В МОДЕЛИ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА[©]

Работа поддержана АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/500
 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы

Рассматривается плоская задача о движении кругового цилиндра с горизонтальной образующей в поле силы тяжести.

Пусть x, y - декартовы прямоугольные координаты в плоскости перпендикулярной образующей цилиндра, $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$, $\mathbf{u} = (u, v) = (u_r, u_\varphi)$ - вектор скорости в декартовой прямоугольной и полярной системах координат соответственно; γ - положительная постоянная; $\mathbf{f}_g = (0, -g)$, g - ускорение свободного падения; P - заданное давление. Остановимся несколько подробнее на случае гидростатического равновесия.

Рассматривая задачу обтекания горизонтального цилиндра, в уравнении движения [2]

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_g - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1)$$

естественно перейти к полярным координатам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (2)$$

центр которой расположен на оси цилиндра, а полярный угол φ отсчитывается от положительного направления оси абсцисс декартовой прямоугольной системы координат.

Для этого сначала рассмотрим решение задач о выражении основных операций векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах в общем случае [4]. Применив затем полученный результат к цилиндрической системе координат, запишем уравнение (1) в полярных координатах.

❶ Предварительно введем понятие коэффициентов Ламэ. Пусть есть две ортогональные системы координат:

1) декартова прямоугольная: x, y, z с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и

2) произвольная ортогональная криволинейная система координат: q_1, q_2, q_3 , где за $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ обозначены единичные орты, взятые по осям криволинейных координат, связанные между собой зависимостью:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3). \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим теперь радиус-вектор $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ [3] и составим производную $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$. Поскольку при дифференцировании q_2 и q_3 считаются постоянными, годографом вектора $\mathbf{r}$ является координатная линия q_1 , а потому вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$ имеет направление касательной к координатной линии q_1 , т.е.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1 \mathbf{i}_1,$$

где H_1 - длина вектора $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$.

В силу того, что $\mathbf{i}_1$ есть единичный вектор, из последнего равенства легко получаем:

$$(H_1)^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right)$$

или, так как

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_1} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial z}{\partial q_1} \mathbf{i}_3, \quad (4)$$

то

$$(H_1)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2, \quad (5)$$

Аналогичные рассуждения приводят к трем формулам:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1 \mathbf{i}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = H_2 \mathbf{i}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = H_3 \mathbf{i}_3, \quad (6)$$

где

$$H_j = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \right)} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_j} \right)^2}, \quad j=1, 2, 3. \quad (7)$$

Величины H_j , $j=1, 2, 3$ называются *коэффициентами Ламэ*.

Например, коэффициенты Ламэ для полярной системы координат (2):

$$H_r = H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2} = \sqrt{\cos^2 + \sin^2} = 1, \quad (8)$$

$$H_\varphi = H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2} = \sqrt{r^2 (-\sin)^2 + r^2 \cos^2} = r. \quad (9)$$

❷ Выразим градиент скалярной функции ∇ в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 [3, 4].

° Производная по направлению $\mathbf{s}$ может быть записана через оператор Гамильтона ∇ [5]

$$\frac{\partial}{\partial s} = (\nabla, \mathbf{s}), \quad (10)$$

где $d\mathbf{s}$ - элементарное перемещение по этому (вообще говоря, произвольному) направлению. Проекцией

∇ на ось q_j криволинейных координат по самому определению является $\frac{\partial}{\partial s_j}$. Беря за $\mathbf{s}$ по очереди каж-

дое из направлений осей криволинейных координат, имеем для элементарных перемещений вдоль послед-

них согласно (6) выражения:

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3,$$

в силу которых имеем:

$$\frac{\partial}{\partial s_j} = \frac{1}{H_j} \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad j=1, 2, 3.$$

Откуда получаем

$$\nabla = \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \mathbf{i}_3. \quad (11)$$

В частности, в полярных координатах, где введены обозначения $\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{i}_2$, градиент выразится по формуле:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (12)$$

•

❸ Рассмотрим теперь слагаемое $(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}$ уравнения (1), где

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_\varphi = u_r \mathbf{e}_r + u_\varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

Наибольшие осложнения, связанные с применением криволинейных координат [3], коренятся в том обстоятельстве, что единичные векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ имеют в криволинейных координатах различные направления в различных точках.

Удобно, применяя оператор ∇ к произведениям векторов и скаляров, согласно [5], пользоваться следующим правилом: запишем результат применения оператора ∇ к произведению в виде суммы произведений такой, что в каждом слагаемом оператор ∇ применяется к одному из сомножителей, который отметим «стрелкой», например $\nabla \cdot \mathbf{a}$. Потом каждое слагаемое преобразуется так, чтобы все сомножители, не отмеченные стрелкой, оказались слева от ∇ . После этого стрелки опустим.

Для упрощения дальнейших выкладок в уравнении (1) перейдем от формы Эйлера к форме Ламба. Для этого предварительно рассмотрим векторное выражение [3, 5]

$$\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \left(\mathbf{b}, \mathbf{a} \right) - (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a},$$

где последнее равенство имеет место согласно формуле двойного векторного произведения [1, 3]. Аналогично

$$\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = \nabla \left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \right) - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}.$$

Складывая последние два равенства, получаем:

$$\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b} = \nabla \left(\mathbf{b}, \mathbf{a} \right) - (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} + \nabla \left(\mathbf{a}, \mathbf{b} \right) - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}$$

или

$$\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b} = \nabla (\mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}. \quad (13)$$

Полагая в последнем выражении $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, получим

$$\nabla (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{a}$$

или, учитывая, что $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a^2$:

$$\nabla \frac{a^2}{2} = \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a} + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{a}. \quad (14)$$

Воспользовавшись (12) перепишем (1) в виде:

$$\mathbf{u}_t + \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{2} \text{div } \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_g - \frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (15)$$

где $u^2 = u_r^2 + u^2$.

① Применим ко второму слагаемому формулы (15) $\nabla \frac{u^2}{2}$ операцию (12) и получим в полярной системе координат:

$$\nabla \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{2r} \frac{\partial u^2}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (16)$$

② Выразим вихрь некоторого вектора в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 [4].

° Положив в формуле для градиента (10) $\mathbf{a} = \mathbf{q}_1$, получим

$$\nabla q_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial q_1}{\partial q_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial q_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial q_1}{\partial q_3} \mathbf{i}_3 = \frac{1}{H_1} \mathbf{i}_1,$$

Взяв операцию вихря от обеих частей этого равенства и замечая что [5] (следствие теоремы Стокса [3])

$$\text{rot grad } q_1 = \nabla \times \nabla q_1 = (\nabla \times \nabla) q_1 = \mathbf{0},$$

и т.к. [5]

$$\text{rot} \left(\mathbf{a} \right) = \nabla \times \left(\mathbf{a} \right) = \nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{a} \right) + \nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{a} \right) =$$

$$= \nabla \frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{a} + \nabla \times \frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla = \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad } \mathbf{a}, \quad (17)$$

получаем

$$\mathbf{0} = \text{rot} \left(\frac{1}{H_1} \mathbf{i}_1 \right) = \frac{1}{H_1} \text{rot } \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \times \text{grad } \frac{1}{H_1},$$

и что

$$\text{grad } \frac{1}{H_1} = -\frac{1}{H_1^2} \text{grad } H_1,$$

имеем

$$\text{rot } \mathbf{i}_1 = -\frac{1}{H_1} \mathbf{i}_1 \times \text{grad } H_1.$$

Вычисляя векторное произведение [1, 3], находим

$$\text{rot } \mathbf{i}_1 = \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial s_3} \mathbf{i}_2 - \frac{\partial H_1}{\partial s_2} \mathbf{i}_3 \right).$$

Применяя теперь формулу для производной по направлению (10) и учитывая выражения для градиента в криволинейных координатах (11), получаем

$$\frac{\partial H_1}{\partial s_2} = (\nabla H_1, \mathbf{i}_2) = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial s_3} = (\nabla H_1, \mathbf{i}_3) = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3},$$

и, значит,

$$\text{rot } \mathbf{i}_1 = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{i}_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_3. \quad (18.1)$$

Аналогично получаем:

$$\text{rot } \mathbf{i}_2 = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{i}_3 - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \mathbf{i}_1, \quad (18.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{i}_3 = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \mathbf{i}_1 - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \mathbf{i}_2. \quad (18.3)$$

Нетрудно теперь перейти к выражению вихря любого вектора $\mathbf{a}$, разложив последний по ортам:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3,$$

Учитывая, что

$$\text{rot}(\mathbf{a}) = \text{rot}(a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3) = \text{rot}(a_1 \mathbf{i}_1) + \text{rot}(a_2 \mathbf{i}_2) + \text{rot}(a_3 \mathbf{i}_3),$$

рассмотрим отдельно каждое слагаемое последнего выражения $\text{rot}(a_j \mathbf{i}_j)$, $j = 1, 2, 3$. Основываясь на известной формуле векторного анализа (17), находим, например, для $j = 1$

$$\begin{aligned} \text{rot}(a_1 \mathbf{i}_1) &= a_1 \text{rot } \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \times \text{grad } a_1 = \frac{a_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{i}_2 - \frac{a_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_1 \times \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial a_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial a_1}{\partial q_3} \mathbf{i}_3 \right) = \\ &= \left(\frac{a_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial a_1}{\partial q_3} \right) \mathbf{i}_2 - \left(\frac{a_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial a_1}{\partial q_2} \right) \mathbf{i}_3 = \left(\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_3} \right) \mathbf{i}_2 - \left(\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_2} \right) \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Проделав аналогичные выкладки для остальных компонент вектора $\mathbf{a}$, получим

$$\text{rot}(a_2 \mathbf{i}_2) = \left(\frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_1} \right) \mathbf{i}_3 - \left(\frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_3} \right) \mathbf{i}_1,$$

$$\text{rot}(a_3 \mathbf{i}_3) = \left(\frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_2} \right) \mathbf{i}_1 - \left(\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_1} \right) \mathbf{i}_2.$$

Собирая, полученные результаты в одну формулу, находим выражения для вихря вектора $\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{a}) &= \left(\frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_2} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_3} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_3} - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_1} \right) \mathbf{i}_2 + \\ &+ \left(\frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_2} \right) \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (19)$$

В частности, в полярных координатах, где введены обозначения $\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1$, $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{i}_2$, учитывая (8) и (9) вихрь вектора $\mathbf{a}$ выразится по формулам:

$$\text{rot}(\mathbf{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_3. \quad (20)$$

•

③ Найдем теперь третье слагаемое в формуле (15) $-\mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u}$. Согласно (20)

$$\text{rot } \mathbf{u} = \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_3.$$

Умножая последнее выражение векторно на $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$, получим

$$\text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u} = -u \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r + u_r \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\theta.$$

④ Учитывая последнее равенство и (15) (выражение для второго слагаемого формулы (15)), для второго слагаемого формулы (1) находим в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} &= \nabla \frac{u^2}{2} - \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} - \frac{u^2}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u_r}{\partial} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial u^2}{\partial} + \frac{u_r u}{r} + u_r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r^2}{\partial} \right) \mathbf{e} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_r^2}{\partial r} - \frac{u^2}{r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u_r}{\partial} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial u^2}{\partial} + \frac{u_r u}{r} + u_r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \mathbf{e} \\ \text{или} \\ (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} &= \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u_r}{\partial} - \frac{u^2}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left(u_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial} + \frac{u_r u}{r} \right) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (21)$$

④ Выразим теперь дивергенцию некоторого вектора $\mathbf{a}$ в криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 [4].

° Разложим произвольный вектор $\mathbf{a}$ по ортам:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3,$$

Таким образом, получаем:

$$\text{div } \mathbf{a} = \text{div}(a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3) = \text{div}(a_1 \mathbf{i}_1) + \text{div}(a_2 \mathbf{i}_2) + \text{div}(a_3 \mathbf{i}_3).$$

А так как [3, 5]:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{a}) &= (\nabla, \mathbf{a}) = \left(\nabla, \downarrow \mathbf{a} \right) + \left(\nabla, \uparrow \mathbf{a} \right) = \left(\nabla \downarrow, \mathbf{a} \right) + \left(\nabla, \uparrow \mathbf{a} \right) = \\ &= \left(\mathbf{a}, \nabla \downarrow \right) + \left(\nabla, \uparrow \mathbf{a} \right) = (\mathbf{a}, \nabla) + \text{div } \mathbf{a}, \end{aligned}$$

то окончательно

$$\text{div } \mathbf{a} = a_1 \text{div } \mathbf{i}_1 + a_2 \text{div } \mathbf{i}_2 + a_3 \text{div } \mathbf{i}_3 + (\mathbf{i}_1, \nabla a_1) + (\mathbf{i}_2, \nabla a_2) + (\mathbf{i}_3, \nabla a_3). \quad (22)$$

Кроме того [3, 5]

$$\begin{aligned} \text{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \left(\nabla, \downarrow \mathbf{a}, \mathbf{b} \right) + \left(\nabla, \uparrow \mathbf{a}, \mathbf{b} \right) = \left(\mathbf{b}, \nabla, \downarrow \mathbf{a} \right) - \left(\mathbf{a}, \nabla, \downarrow \mathbf{b} \right) = \\ &= (\mathbf{b}, \nabla \times \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \nabla \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \text{rot } \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \text{rot } \mathbf{b}), \end{aligned}$$

а так как $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3$, то

$$\text{div } \mathbf{i}_1 = \text{div}(\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3) = (\mathbf{i}_3, \text{rot } \mathbf{i}_2) - (\mathbf{i}_2, \text{rot } \mathbf{i}_3).$$

Учитывая теперь (18.2), (18.3), и в силу соотношений ортогональности $((\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) = 0$ при $k \neq l$) получаем

$$\text{div } \mathbf{i}_1 = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1}, \quad (23.1)$$

и аналогично

$$\text{div } \mathbf{i}_2 = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \quad (23.2)$$

$$\text{div } \mathbf{i}_3 = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3}. \quad (23.3)$$

Вспоминая (11) с учетом того, что $(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) = 0$ при $k \neq l$, и используя последние соотношения (23.1)-(23.3), преобразуем выражение для дивергенции произвольного вектора $\mathbf{a}$ (22) к виду:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{a} &= \frac{a_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{a_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{a_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{a_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \\ &+ \frac{a_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{a_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial a_2}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial a_3}{\partial q_3} = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

В частности, в полярных координатах, учитывая (8) и (9), дивергенция вектора $\mathbf{a}$ выразится по формулам:

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{a_1}{r} + \frac{\partial a_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_2}{\partial}. \quad (25)$$

•

И для третьего слагаемого формулы (1) в полярной системе координат находим:

$$\frac{\mathbf{u}}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} = \left(\frac{u_r^2}{2r} + \frac{u_r}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{2r} \frac{\partial u}{\partial} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{u_r u}{2r} + \frac{u}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u}{2r} \frac{\partial u}{\partial} \right) \mathbf{e} . \quad (26)$$

❶ Полагая в формуле (24) $\mathbf{a} = \nabla$, получаем, учитывая (11), выражение для оператора Лапласа в криволинейных координатах:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right)}{\partial q_1} + \frac{\partial \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right)}{\partial q_2} + \frac{\partial \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right)}{\partial q_3} \right) \quad (27)$$

С учетом (8) и (9) в полярной системе координат (27) принимает вид хорошо известный вид:

$$\Delta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial} \right)}{\partial} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2} .$$

Теперь четвертое слагаемое формулы (1) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} &= -\left(\frac{\partial^2 (u_r \mathbf{e}_r + u \mathbf{e})}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_r \mathbf{e}_r + u \mathbf{e})}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (u_r \mathbf{e}_r + u \mathbf{e})}{\partial^2} \right) = \\ &= -\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial^2} \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2} \right) \mathbf{e} - \\ &= -\left(2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial} \right) - \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \mathbf{e}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_r}{\partial^2} \right) u_r - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial^2} \right) u . \end{aligned}$$

❷ Для дальнейших преобразований вычислим производные [3] $\frac{\partial \mathbf{i}_k}{\partial q_j}$, $k=1, 2, 3$, $j=1, 2, 3$.

Так как $\mathbf{i}_k$ есть единичный вектор, т.е. $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_k = (\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_k) = |\mathbf{i}_k|^2 = 1$,

то из формулы (14) получаем:

$$0 = \mathbf{i}_k \times \operatorname{rot} \mathbf{i}_k + (\mathbf{i}_k \nabla) \mathbf{i}_k .$$

Так как единичный вектор $\mathbf{i}_k$ направлен по касательной к координатной линии q_k , то согласно (11):

$$(\mathbf{i}_k \nabla) \mathbf{i}_k = \frac{1}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \mathbf{i}_k .$$

С другой стороны

$$(\mathbf{i}_k \nabla) \mathbf{i}_k = -\mathbf{i}_k \times \operatorname{rot} \mathbf{i}_k = \operatorname{rot} \mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_k$$

и получаем, например, для $\mathbf{i}_1$ на основании формулы (18.1):

$$(\mathbf{i}_1 \nabla) \mathbf{i}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = \left(\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{i}_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_3 \right) \times \mathbf{i}_1 = -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_2 - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{i}_3 .$$

Откуда:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{i}_1 = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_2 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{i}_3 . \quad (28.1)$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{i}_2 = -\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_3} \mathbf{i}_3 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{i}_1 , \quad (28.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3} \mathbf{i}_3 = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \mathbf{i}_1 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \mathbf{i}_2 , \quad (28.1)$$

что в полярной системе координат дает:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 \text{ и } \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial} = -\mathbf{e}_r . \quad (29)$$

Для вычисления, например, $\frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{i}_1$, замечая, что единичный вектор $\mathbf{i}_2$ направлен по касательной к координатной линии q_2 , то согласно (11):

$$(\mathbf{i}_2 \nabla) \mathbf{i}_1 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{i}_1.$$

Рассмотрим сначала

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times \left(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} \right) + \nabla \times \left(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} \right) = \\ &= \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) + \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\mathbf{b}, \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} - \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} (\nabla, \mathbf{a}) + \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - (\mathbf{a}, \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{b}} = \\ &= (\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b} (\nabla, \mathbf{a}) + \mathbf{a} (\nabla, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$(\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} = \mathbf{b} (\nabla, \mathbf{a}) - \mathbf{a} (\nabla, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b} + \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Из (13) получаем:

$$(\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} = \nabla(\mathbf{b}, \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b}.$$

Складывая, последние два равенства, находим:

$$2(\mathbf{b}, \nabla) \mathbf{a} = \nabla(\mathbf{b}, \mathbf{a}) - \mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} (\nabla, \mathbf{a}) - \mathbf{a} (\nabla, \mathbf{b}) + \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Подставляя сюда $\mathbf{a} = \mathbf{i}_1$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i}_2$ и опираясь на (18.1)-(18.3), (23.1) и (23.2), получим:

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{i}_2, \nabla) \mathbf{i}_1 &= \nabla(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1) - \mathbf{i}_2 \times \text{rot} \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \times \text{rot} \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 (\nabla, \mathbf{i}_1) - \mathbf{i}_1 (\nabla, \mathbf{i}_2) + \text{rot}(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2) = \\ &= -\mathbf{i}_2 \times \text{rot} \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \times \text{rot} \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \text{div} \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \text{div} \mathbf{i}_2 + \text{rot}(\mathbf{i}_3) = \\ &= -\mathbf{i}_2 \times \left(\frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{i}_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_3 \right) - \mathbf{i}_1 \times \left(\frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{i}_3 - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \mathbf{i}_1 \right) + \\ &+ \mathbf{i}_2 \left(\frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right) - \mathbf{i}_1 \left(\frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \mathbf{i}_1 - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \mathbf{i}_2 = \\ &= \mathbf{i}_2 \left(\frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) - \mathbf{i}_1 \left(\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 - \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_3 = \frac{2}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{i}_2 \end{aligned}$$

Откуда находим:

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \mathbf{i}_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{i}_2. \quad (30.1)$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \mathbf{i}_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{i}_1. \quad (30.2)$$

В полярной системе координат:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \mathbf{e}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial r} = 0. \quad (31)$$

С помощью (29) и (31) получаем для четвертого слагаемого формулы (1) следующий вид:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} &= -\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} \right) \mathbf{e}_r - \\ &- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} \right) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (30)$$

И окончательно уравнение (1) в полярных координатах принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{3u_r}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u_r}{\partial} + \frac{u_r}{2r} \frac{\partial u}{\partial} - \frac{u^2}{r} + \frac{u_r^2}{2r} \\ & - \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial} - \frac{u_r}{r^2} \right) = -g \sin \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r}, \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{3u}{2r} \frac{\partial u}{\partial} + \frac{3u_r u}{2r} \\ & - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial} - \frac{u}{r^2} \right) = -g \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial}. \end{aligned} \right. \quad (31)$$

Список литературы

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1980.
2. Ипатова В. М. Исследование задачи, возникающей при вариационном построении решений системы Навье-Стокса // Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения»: тезисы докладов. Новосибирск: НГУ, 2007. С. 163-164.
3. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Издательство Академии наук СССР, 1961.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, 1963. Ч. I.
5. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. М.: Изд-во МФТИ, 1997.

УДК 517.9

Виктор Игнатьевич Филиппенко

Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

О КРАТНОСТИ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[©]

Пусть A - самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L^2[0, \infty)$, а E - его спектральная функция. Предположим, что векторы $u_1, u_2, \dots, u_n$ образуют порождающий базис оператора A , т. е. линейная оболочка множества всех векторов $E_\Delta u_k, k=1, 2, \dots, n$ плотна в $L^2[0, \infty)$. Спектр оператора A называется n -кратным, если n есть минимальное число векторов, образующих порождающий базис. В настоящей заметке получена оценка кратности спектра самосопряженного оператора A , порожденного в гильбертовом пространстве $L^2[0, \infty)$ формально самосопряженной обыкновенной дифференциальной операцией произвольного четного порядка $2n$.

Введем формально самосопряженное дифференциальное выражение, заданное на интервале $I = [0, \infty)$:

$$l[y] = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_{n-k}(x) \frac{d^k y}{dx^k} \right).$$

Предположим, что коэффициенты $p_k(x)$ этой операции дважды непрерывно дифференцируемы, а коэффициент $p_0(x) \neq 0$ на промежутке $I = [0, \infty)$. Пусть D - множество таких функций $y \in L^2(I)$, каждая из которых $y \in L^2(I)$ и удовлетворяет следующим условиям: а) обращается в нуль вне конечного интервала, принадлежащего I ; б) все квазипроизводные $y^{[k]}(x)$ до порядка $2n-1$ включительно абсолютно непрерывны; в) $y^{[2n]}(x) \in L^2(I)$. Введем оператор L'_0 , область определения которого есть D и $L'_0 y = l[y]$. Пусть L_0 - замыкание оператора L'_0 . Известно, что L_0 есть замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (m, m) , где $n \leq m \leq 2n$. Здесь m - число линейно независимых решений уравнения $l[y] = y, \text{Im } y \neq 0$, принадлежащих $L^2(I)$.