Филиппенко Виктор Игнатьевич
О КРАТНОСТИ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/1-1/8.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2010. № 1 (32): в 2-х ч. Ч. I. C. 29-31. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/1-1/

© Издательство "Грамота"
Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

❼ И окончательно уравнение (1) в полярных координатах принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t}+\frac{3u_r}{2}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u}{r}\frac{\partial u_r}{\partial}+\frac{u_r}{2r}\frac{\partial u}{\partial}-\frac{u^{\;2}}{r}+\frac{u_r^{\;2}}{2r} \\ \qquad -\frac{}{}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial^{\;2}}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial}-\frac{u_r}{r^2}\right)=-g\sin\; -\frac{1}{}\frac{\partial P}{\partial r}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{2}\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{3u}{2r}\frac{\partial u}{\partial}+\frac{3u_r u}{2r} \\ \qquad -\frac{}{}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^{\;2}}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial}-\frac{u}{r^2}\right)=-g\cos\; -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial}. \end{cases} \tag{31}$$

Список литературы

1. **Беклемишев Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1980.
2. **Ипатова В. М.** Исследование задачи, возникающей при вариационном построении решений системы Навье-Стокса // Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения»: тезисы докладов. Новосибирск: НГУ, 2007. С. 163-164.
3. **Кочин Н. Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Издательство Академии наук СССР, 1961.
4. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, 1963. Ч. I.
5. **Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.** Курс математического анализа. М.: Изд-во МФТИ, 1997.

УДК 517.9

Виктор Игнатьевич Филиппенко
Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

О КРАТНОСТИ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА©

Пусть A - самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L^2[0,\infty)$, а E - его спектральная функция. Предположим, что векторы $u_1,u_2,...,u_n$ образуют порождающий базис оператора A, т. е. линейная оболочка множества всех векторов $E_\Delta u_k, k=1,2,...,n$ плотна в $L^2[0,\infty)$. Спектр оператора A называется n- кратным, если n есть минимальное число векторов, образующих порождающий базис. В настоящей заметке получена оценка кратности спектра самосопряженного оператора A, порожденного в гильбертовом пространстве $L^2[0,\infty)$ формально самосопряженной обыкновенной дифференциальной операцией произвольного четного прядка $2n$.

Введем формально самосопряженное дифференциальное выражение, заданное на интервале $I=[0,\infty)$:

$$l[y]=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left(p_{n-k}(x)\frac{d^k y}{dx^k}\right).$$

Предположим, что коэффициенты $p_k(x)$ этой операции дважды непрерывно дифференцируемы, а коэффициент $p_0(x)\neq 0$ на промежутке $I=[0,\infty)$. Пусть D - множество таких функций $y\in L^2(I)$, каждая из которых $y\in L^2(I)$ и удовлетворяет следующим условиям: а) обращается в нуль вне конечного интервала, принадлежащего I; б) все квазипроизводные $y^{[k]}(x)$ до порядка $2n-1$ включительно абсолютно непрерывны; в) $y^{[2n]}(x)\in L^2(I)$. Введем оператор L_0', область определения которого есть D и $L_0'y=l[y]$. Пусть L_0 - замыкание оператора L_0'. Известно, что L_0 есть замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (m,m), где $n\le m\le 2n$. Здесь m - число линейно независимых решений уравнения $l[y]=\; y, \mathrm{Im}\;\neq 0,$ принадлежащих $L^2(I)$.

© Филиппенко В. И., 2010

Каждой функции $y(x)$, для которой $l[y]$ имеет смысл, поставим в соответствие вектор-функцию $\hat{y}(x)=\left(y^{[0]}(x),y^{[1]},...,y^{[2n-1]}(x)\right)$, будем рассматривать $\hat{y}(x)$ при любом $x\in I$ как матрицу-столбец. Введем в рассмотрение квадратную матрицу $J=\| \ {}_{jk}\|_1^{2n}$, полагая ${}_{jk}=0$ при $j+k\neq 2n+1$, ${}_{jk}=sign(j-k)$ для $j+k=2n+1(j,k=1,2,...2n)$.

Пусть A - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(I)$ с областью определения $D(A)$, являющийся расширением оператора L_0, определяемым разделяющимися краевыми условиями. Имеет место теорема, позволяющая судить о кратности спектра оператора A по поведению коэффициентов выражения $l[y]$ в окрестности сингулярного конца.

Теорема 1. Пусть при любых $\ \in[\ ,\ ]$ уравнение $l[y]=\ y$ имеет набор q линейно независимых решений

$$v_1(x,\ ),v_2(x,\ ),...,v_q(x,\ ) \qquad (1)$$

таких, что:

1) $v_k(x,\ )\in L^2(I)\ (k=1,2,...,q)$;

2) $\hat{f}^*(x)J\hat{v}_k(x,\ )\big|_{x=\infty}=0\ (k=1,2,...,q)$ для любой функции $f(x)\in D(A)$;

3) среди линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{q}c_k v_k(x,\ )$ нет собственных функций оператора A;

4) каждая из вектор-функций $\hat{v}_k(x,\ )$ набора (1) при любом фиксированном $x\in I$ удовлетворяет условию Липшица относительно на сегменте $[\ ,\ ]$. Тогда кратность части спектра оператора A, заключенной в сегменте $[\ ,\ ]$, не превосходит $n-q$.

Поскольку известен ряд предложений, позволяющих судить об асимптотике решений дифференциального уравнения по поведению его коэффициентов, то эта теорема оказывается полезной для определения кратности спектра оператора A на основе свойств коэффициентов выражения $l[y]$. Воспользуемся асимптотическими формулами, полученными М.В. Федорюком [1, с. 302].

Предположим [Там же], что коэффициенты выражения $l[y]$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}p_0(x)=1,\lim\limits_{x\to\infty}|p_n(x)|=\infty$;

2) пределы $\lim\limits_{x\to\infty}p_k(x)p_0^{-1}(x)\ {}^{-2k}(x)=c_k$ существуют и конечны, где $\ (x)=\left(p_n(x)p_0^{-1}(x)\right)^{\frac{1}{2n}}$;

3) уравнение $g(\ )=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k\ {}^{2n-2k}=0$ не имеет кратных корней;

4) функции $p_k'^2 p_n^{-\frac{4n+1}{2n}}, p_k'' p_n^{-\frac{2k+1}{2n}}$ суммируемы на промежутке I при $0\leq k\leq n$;

5) $p_k'(x)p_n^{-\frac{2k+1}{2n}}(x)\to 0$ при $x\to\infty$;

6) $\int_{x_0}^{\infty}|p_n(x)|^{-1+\frac{1}{2n}}dx=\infty$ для любого $x_0>0$.

Обозначим через ${}_j(x)$ корни уравнения $f(x,\ )=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p_k(x)\ {}^{2n-2k}=0$ и положим $\ (x)=\max\limits_j|\ {}_j(x)|$, $\ (x)=\max\limits_k\left|p_k'(x)p_0^{-1}(x)\ {}^{-2k}(x)\right|$, $\ (x)=\max\limits_k\left|p_k''(x)p_0^{-1}\ {}^{-2k}(x)\right|$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть условия 1) - 5) выполнены и $\left|\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left(\ {}_i(x)-\ {}_j(x)\right)dx\right|<\infty$, а также

$$\int_{x_0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{\infty}|p_n(\ )|^{-1+\frac{1}{2n}}d\ \right)|p_n(x)|(\ {}^2+\ )dx<\infty,$$

если выполняется 6). Фиксируем $R>0$. Тогда существует $2n$ линейно независимых решений $y_j(x,\ )$ уравнения $l[y]=\ y\ -\infty<\ <+\infty$, для которых имеют место асимптотические формулы: если $x\to\infty$, то

$$y_j(x,\ ) = \left(p_k(x)\right)^{-\frac{2n-1}{4n}} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \ _j(t)\,dt\right)\left(1+o(1)\right) \qquad (2)$$

И, кроме того, функции, представленные формулами (2), при любом фиксированном $x \ge 0$ являются регулярными функциями в области $|\ | \le R$ вместе со всеми своими квазипроизводными до порядка $2n-1$.

Лемма. Пусть функции $p_k(x)$ удовлетворяют условиям 1) - 6) и, кроме того, $\mathrm{Re}\ '_j = 0$ $\left(\ '_j = e^{\frac{i\Pi}{2n}}\ _j\right)$ для всех $1 \le j \le 2k, \mathrm{Re}\ '_j \ne 0$, для остальных j и $\ \in [\ ,\ ]$ $g'(\ '_i) \ne g'(\ '_j)$ $i \ne j,\ 1 \le i, j \le 2k$.

Пусть в случае $\mathrm{Re}\ '_i \ne 0$ из равенства $\mathrm{Re}\ '_i = \mathrm{Re}\ '_j$ следует: либо $i = j$, либо $\ '_i = \overline{\ '_j}$ и в этом случае выполнено условие $\mathrm{Im}\, g'(\ '_j) \ne 0$.

Если при $i \ne j$ и достаточно больших значениях переменной x функции $\ _{ij}(x,\ ) = \mathrm{Im}\left(\ _i(x,\ ) - \ _j(x,\ )\right)$ $\left(\ \in [\ ,\ ]\right)$ монотонны по x при любом $\ \in [\ ,\ ]$ и $p'_n(x) \ne 0$ для достаточно больших x, то число линейно независимых решений уравнения $l[y] = \ y$ $\left(\ \in [\ ,\ ]\right)$, принадлежащих $L^2(I)$, равно $n-k$.

Теорема 3. Пусть условия предыдущей леммы выполнены и

$$\int_{x_0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{\infty}|p_n(\ )|^{-1+\frac{1}{2n}}d\ \right)|p_n(x)|(\ ^2 + \ )dx < \infty,$$

тогда кратность спектра самосопряженного оператора *A* на отрезке $[\ ,\ ]$ не превосходит k.

Следствие. Если условия предыдущей теоремы выполнены, то кратность непрерывного спектра оператора *A* на отрезке $[\ ,\ ]$ вещественной - оси не превосходит числа пар решений уравнения $g(\ ) = 0$, вещественные части которых равны нулю.

Пример. Рассмотрим двухчленное выражение

$$l[y] = (-1)^n\left(p_0(x)y^{(n)}\right)^{(n)} + p_n(x)y \qquad (3)$$

Пусть коэффициенты $p_0(x)$ и $p_n(x)$ удовлетворяют условиям Теоремы 3. В этом случае, поскольку $c_0 = c_n = 1,\ c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$, имеем

$$g(\ ) = \ ^{2n} + (-1)^n = 0 \qquad (4)$$

Значит, из всех корней уравнения (4) в случае четного n только одна пара имеет вещественную часть равную нулю. Поэтому на отрезке $[\ ,\ ]$ - оси, все точки которого удовлетворяют условиям леммы, кратность непрерывного спектра оператора A, порожденного выражением (3) и разделяющимися краевыми условиями, не превосходит единицы. В этом случае число решений дифференциального уравнения $l[y] = \ y$ при любом вещественном меньше дефектного числа и условия леммы выполняются при любом вещественном . Следовательно, непрерывный спектр оператора A простой и заполняет всю вещественную ось.

2. Теорема о простоте замкнутого симметрического оператора L_0 порожденного формально самосопряженной обыкновенной дифференциальной операцией $l[y]$ в гильбертовом пространстве $L^2(a,b)$ позволяет судить о кратности спектра (как дискретной, так и непрерывной его части) любого самосопряженного расширения оператора L_0 в пространстве $L^2(a,b)$ [2, p. 675].

Теорема 4. Пусть коэффициенты выражения $l[y]$ удовлетворяют условиям 1) - 5), $\int_{x_0}^{\infty}|p_n(x)|^{-1+\frac{1}{2n}}dx < \infty$. Пусть из равенства $\mathrm{Re}\ _i = \mathrm{Re}\ _j \ne 0$ следует, что либо $i = j$, либо $\ _i = \overline{\ _j}$ и $\mathrm{Im}\, g'(\ _i) \ne 0$. Тогда, если $\mathrm{Re}\ _j = 0$, $g'(\ _i) \ne g'(\ _j)$ при $i \ne j$ и $1 \le i, j \le 2k$ и $\mathrm{Re}\ _j \ne 0$ при остальных j, то кратность спектра любого самосопряженного расширения оператора L_0 в пространстве $L^2[0,\infty)$ не превосходит $n+k$.

Список литературы

1. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов // Труды. Моск. матем. о-ва. 1966. Т. 15. С. 296-345.
2. **Gilbert R. C.** Simplicity of linear ordinary differential operators // J. Different. Eq. 1972. V. 11. № 3. P. 672-681.