Кан даже несколько утрировал массивность и крупную пластику конструкций, эффектно использовал контрасты материалов. Он не избегал симметрии, но как сильнейший прием эмоционального воздействия использовал и ее частичное нарушение.

Кан получил Золотую медаль Американского института архитекторов (AIA) в 1971 и Золотую медаль RIBA в 1972.

Музыка, хотя она и не стала профессией Кана, сопровождала его всю жизнь: в своих теоретических высказываниях Кан нередко прибегал к сравнениям архитектурного творчества с творчеством композиторов. «Композитор записывает ноты, чтобы услышать звуки, - писал зодчий - В архитектуре ритм создается, чтобы родилась музыка соответствий между светом и пространством. Символы музыки и архитектуры поэтому очень близки Я верю в то, что архитектура - разумный способ организации пространства. Она должна быть создана так, чтобы конструкция и пространство проявлялись в ней самой. Выбор конструкции должен учитывать организацию света. Структура обслуживающих помещений должна дополнить структуру обслуживаемых. Одна - грубая, брутальная, другая - ажурная, полная света» [Цит. по: 3, с. 225].

Винсент Скалли, выдающийся американский историк и профессор архитектуры Йельского университета, однажды заметил: “Пожалуй, лишь некоторые русские романы, в особенности Толстого и Достоевского, приходят на ум среди художественных произведений, которые можно сопоставить с работами Кана по степени глубины и серьезности” [Цит. по: 1].

Луис Кан скончался 17 марта 1974 года в Нью-Йорке.

Список литературы

1. **Белоголовский Вл.** Музей Кимбелл. Личные впечатления [Электронный ресурс] // Архитектурный вестник. 2009. № 4 (109). URL: http://www.archvestnik.ru/node/1956 (дата обращения: 28.12.2009).
2. **Иконников А. В.** Архитектура XX века. Утопии и реальность: в 2-х т. М.: Издательство «Прогресс-Традиция», 2002. Т. 2. 672 с.
3. **Самин Д. К.** 100 великих архитекторов. М.: Издательство «Вече», 2001. 286 с.
4. **McCarter Robert .** Louis I. Kahn. Phaidon Press, Incorporated. 2005. 512 p.
5. **Twombly Robert .** Louis Kahn. Essential texts. W. W. Norton, 2004. 288 p.

УДК 515.12

Тамара Николаевна Шармина, Валентин Геннадьевич Шармин
ГОУ ВПО «Тюменский государственный университет»

СВЯЗЬ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В (n+2)-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ГАУССОВОЙ КРИВИЗНОЙ ЕЕ СФЕРИЧЕСКОГО ОБРАЗА©

Рассмотрим двумерную поверхность, заданную вектор-функцией:

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2) \in C^2 \qquad (1)$$

в (n+2)-мерном евклидовом пространстве. В нормальной плоскости этой поверхности введем ортонормированный базис $\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n$ и в каждом из направлений определим квадратичную форму:

$$_k = (\vec{r}_{ij}, \vec{m}_k) du_1 du_2 = b_{ij,k} du_1 du_2, \qquad (2)$$

которую назовем второй квадратичной формой в направлении $\vec{m}_k$, а также величину

$$K_i = \frac{\det((b_{ij,k}))}{\det(\left(g_{ij}\right))}, \qquad (3)$$

где g_{ij} - коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (1).

ТЕОРЕМА. Величина $K = K_1 + K_2 + ... + K_n$ не зависит от выбора базиса нормального пространства поверхности (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть кроме базиса $\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n$ в нормальном пространстве поверхности (1) задан ортонормированный базис $\vec{m}_1', \vec{m}_2', ..., \vec{m}_n'$. Связь между векторами этих базисов задается следующим образом:

$$\vec{m}_k' = a_{k1} \cdot \vec{m}_1 + a_{k2} \cdot \vec{m}_2 + ... + a_{kn} \cdot \vec{m}_n, \qquad (4)$$

где $\det((a_{ij})) = 1$ (5)

и матрица перехода от старого базиса к новому является ортогональной.

Вычислим

$$b'_{ij,k} = (\vec{r}_{ij} \cdot \vec{m}'_k) = (r_{ij} \cdot a_{k1} \cdot \vec{m}_1 + a_{k2} \cdot \vec{m}_2 + ... + a_{kn} \cdot \vec{m}_n) = \\ = a_{k1} \cdot b_{ij,1} + a_{k2} \cdot b_{ij,2} + ... + a_{kn} \cdot b_{ij,n}. \tag{6}$$

Учитывая (5) и (6), получаем:

$$\det((b'_{ij,k})) = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}^2 \cdot \det((b_{ij,s})); i, j = 1, 2. \tag{7}$$

Из (7) получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} b'_{11,k} & b'_{12,k} \\ b'_{21,k} & b'_{22,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11,1} & b_{12,1} \\ b_{21,1} & b_{22,1} \end{vmatrix} \cdot (a_{11}^2 + a_{21}^2 + ... + a_{n1}^2) + \begin{vmatrix} b_{11,2} & b_{12,2} \\ b_{21,2} & b_{22,2} \end{vmatrix} \cdot (a_{12}^2 + \\ + a_{22}^2 + ... + a_{n2}^2) + \begin{vmatrix} b_{11,n} & b_{12,n} \\ b_{21,n} & b_{22,n} \end{vmatrix} \cdot (a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + ... + a_{nn}^2). \tag{8}$$

Учитывая, что $a_{kn}^2 + a_{kn}^2 + ... + a_{kn}^2 = 1$ в силу ортогональности матрицы перехода, получаем истинность утверждения теоремы.

ТЕОРЕМА. Величина $K = K_1 + K_2 + ... + K_n$ есть гауссова кривизна поверхности (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для поверхности (1) выпишем деривационные формулы:

$$\vec{r}_{11} = \Gamma_{11}^1 \cdot \vec{r}_1 + \Gamma_{11}^2 \cdot \vec{r}_2 + b_{11,1} \cdot \vec{m}_1 + b_{11,2} \cdot \vec{m}_2 + ... + b_{11,n} \cdot \vec{m}_n \tag{9}$$

$$\vec{r}_{12} = \Gamma_{12}^1 \cdot \vec{r}_1 + \Gamma_{12}^2 \cdot \vec{r}_2 + b_{12,1} \cdot \vec{m}_1 + b_{12,2} \cdot \vec{m}_2 + ... + b_{12,n} \cdot \vec{m}_n \tag{10}$$

$$\vec{r}_{22} = \Gamma_{22}^1 \cdot \vec{r}_1 + \Gamma_{22}^2 \cdot \vec{r}_2 + b_{22,1} \cdot \vec{m}_1 + b_{22,2} \cdot \vec{m}_2 + ... + b_{22,n} \cdot \vec{m}_n \tag{11}$$

$$\frac{\partial \vec{m}_i}{\partial u_j} = -b_{j,i}^h \cdot \vec{r}_h; b_{j,i}^h = g^{hk} \cdot b_{kj}; h, k, i, j = 1, 2. \tag{12}$$

Продифференцируем (9) по u_2, в результате получим:

$$\vec{r}_{11,2} = \frac{\partial \Gamma_{11}^h}{\partial u_2} \cdot \vec{r}_h + \Gamma_{11}^k \cdot (\Gamma_{k2}^h \cdot \vec{r}_h + \sum_{i=1}^{n} b_{k2,i} \cdot \vec{m}_i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_{11,i}}{\partial u_2} \cdot \vec{m}_i + \\ + b_{11,1} \cdot (-b_{2,1}^h \cdot \vec{r}_h) + b_{11,2} \cdot (-b_{2,2}^h \cdot \vec{r}_h) + ... + b_{11,n} \cdot (-b_{2,n}^h \cdot \vec{r}_h). \tag{13}$$

Преобразуя последнюю формулу, получим:

$$\vec{r}_{11,2} = (\frac{\partial \Gamma_{11}^h}{\partial u_2} + \Gamma_{11}^k \cdot \Gamma_{k2}^h - b_{11,1} \cdot b_{2,1}^h - b_{11,2} \cdot b_{2,2}^h - ... - b_{11,n} \cdot b_{2,n}^h) \cdot \vec{r}_h + \\ + (\Gamma_{11}^k \cdot \sum_{i=1}^{n} b_{k2,i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_{11,i}}{\partial u_2}) \vec{m}_i. \tag{14}$$

Продифференцируем (10) по u_1, в результате получим:

$$\vec{r}_{12,1} = (\frac{\partial \Gamma_{12}^h}{\partial u_1} + \Gamma_{12}^k \cdot \Gamma_{k1}^h - b_{12,1} \cdot b_{1,1}^h - b_{12,2} \cdot b_{1,2}^h - ... - b_{12,n} \cdot b_{1,n}^h) \cdot \vec{r}_h + \\ + (\Gamma_{12}^k \cdot \sum_{i=1}^{n} b_{k1,i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_{12,i}}{\partial u_1}) \vec{m}_i. \tag{15}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Наличие одинаковых верхнего и нижнего индексов означает суммирование по данному индексу.

Приравнивая коэффициенты при $\vec{r}_2$, получим:

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u_1} + \Gamma_{12}^k \cdot \Gamma_{k1}^2 - b_{12,1} \cdot b_{1,1}^2 - b_{12,2} \cdot b_{1,2}^2 - ... - b_{12,n} \cdot b_{1,n}^2 = \\ = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u_2} + \Gamma_{11}^k \cdot \Gamma_{k2}^2 - b_{11,1} \cdot b_{2,1}^2 - b_{11,2} \cdot b_{2,2}^2 - ... - b_{11,n} \cdot b_{2,n}^2. \tag{16}$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u_1} + \Gamma_{11}^k \cdot \Gamma_{k2}^2 - \Gamma_{12}^k \cdot \Gamma_{k1}^2 = \\ = b_{11,1} \cdot b_{2,1}^2 + b_{11,2} \cdot b_{2,2}^2 + ... + b_{11,n} \cdot b_{2,n}^2 - b_{12,1} \cdot b_{1,1}^2 - b_{12,2} \cdot b_{1,2}^2 - ... - b_{12,n} \cdot b_{1,n}^2. \tag{17}$$

Вычислим

$$b_{11,i} \cdot b_{2,i}^2 - b_{12,i} \cdot b_{1,i}^2 = b_{11,i} \cdot (g^{21} \cdot b_{12,i} + g^{22} \cdot b_{22,i}) - b_{12,i} \cdot (g^{21} \cdot b_{11,i} + \\ + g^{22} \cdot b_{21,i}) = g^{22} \cdot (b_{11,i} \cdot b_{22,i} - (b_{12,i})^2) = g_{11} \cdot K_i. \tag{18}$$

Таким образом, получаем:

$$g_{11}\cdot K=\frac{\partial \Gamma_{11}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{12}^{2}}{\partial u_1}+\Gamma_{11}^{k}\cdot\Gamma_{k2}^{2}-\Gamma_{12}^{k}\cdot\Gamma_{k1}^{2}. \tag{19}$$

Согласно [1, с. 553] гауссова кривизна двумерного многообразия определяется следующим образом:

$$K_{гаусс.}=\frac{R_{12,12}}{g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}{}^{2}}=\frac{\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{q}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{21}^{q}}{\partial u_1}+\Gamma_{2p}^{q}\cdot\Gamma_{11}^{p}-\Gamma_{1p}^{q}\cdot\Gamma_{21}^{p}\right)\cdot g_{q2}}{g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}{}^{2}}. \tag{20}$$

Преобразуем выражение (20):

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{q}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{21}^{q}}{\partial u_1}+\Gamma_{2p}^{q}\cdot\Gamma_{11}^{p}-\Gamma_{1p}^{q}\cdot\Gamma_{21}^{p}\right)\cdot g_{q2}}{g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}{}^{2}}=\\
&=\frac{\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{1}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{21}^{1}}{\partial u_1}+\Gamma_{2p}^{1}\cdot\Gamma_{11}^{p}-\Gamma_{1p}^{1}\cdot\Gamma_{21}^{p}\right)\cdot g_{12}}{g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}{}^{2}}+\\
&+\frac{\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{21}^{2}}{\partial u_1}+\Gamma_{2p}^{2}\cdot\Gamma_{11}^{p}-\Gamma_{1p}^{2}\cdot\Gamma_{21}^{p}\right)\cdot g_{22}}{g_{11}\cdot g_{22}-g_{12}{}^{2}}=\\
&=-g^{12}\cdot\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{1}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{21}^{1}}{\partial u_1}+\Gamma_{2p}^{1}\cdot\Gamma_{11}^{p}-\Gamma_{1p}^{1}\cdot\Gamma_{21}^{p}\right)+\\
&+g^{11}\cdot\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{21}^{2}}{\partial u_1}+\Gamma_{2p}^{2}\cdot\Gamma_{11}^{p}-\Gamma_{1p}^{2}\cdot\Gamma_{21}^{p}\right).
\end{aligned} \tag{21}$$

Умножив выражение (21) на g_{11}, получим:

$$\begin{aligned}
&g_{11}\cdot K_{гаусс.}=g_{11}\cdot\left(-g^{12}\cdot\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{1}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{21}^{1}}{\partial u_1}+\Gamma_{2p}^{1}\cdot\Gamma_{11}^{p}-\Gamma_{1p}^{1}\cdot\Gamma_{21}^{p}\right)+\right.\\
&\left.+g^{11}\cdot\left(\frac{\partial \Gamma_{11}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{21}^{2}}{\partial u_1}+\Gamma_{2p}^{2}\cdot\Gamma_{11}^{p}-\Gamma_{1p}^{2}\cdot\Gamma_{21}^{p}\right)\right)=\\
&=\frac{\partial \Gamma_{11}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial \Gamma_{21}^{2}}{\partial u_1}+\Gamma_{2p}^{2}\cdot\Gamma_{11}^{p}-\Gamma_{1p}^{2}\cdot\Gamma_{21}^{p}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Сравнив (19) и (22), видим, что $K_{гаусс.}=K,$ в силу симметричности по нижним индексам коэффициентов Кристоффеля.

Введем на поверхности (1) полугеодезическую систему координат. Тогда ее первая квадратичная форма будет иметь вид:

$$ds^2=du_1^2+G(u_1,u_2)du_2^2. \tag{23}$$

Деривационные формулы примут вид:

$$\begin{aligned}
&\vec r_{11}=b_{11,1}\cdot\vec m_1+b_{11,2}\cdot\vec m_2+\ldots+b_{11,n}\cdot\vec m_n;\\
&\vec r_{12}=\frac{1}{2}\frac{G_{u_1}}{G}\cdot\vec r_2+b_{12,1}\cdot\vec m_1+b_{12,2}\cdot\vec m_2+\ldots+b_{12,n}\cdot\vec m_n;\\
&\vec r_{22}=\frac{1}{2}G_{u_1}\cdot\vec r_1+\frac{1}{2}\frac{G_{u_2}}{G}\cdot\vec r_2+b_{22,1}\cdot\vec m_1+b_{22,2}\cdot\vec m_2+\ldots+b_{22,n}\cdot\vec m_n;\\
&\vec m_{11}=-b_{11,1}\cdot\vec r_1-\frac{b_{12,1}}{G}\cdot\vec r_2+{}_{12}\cdot\vec m_2+\ldots+{}_{1n}\cdot\vec m_n;\\
&\vec m_{21}=-b_{11,2}\cdot\vec r_1-\frac{b_{12,2}}{G}\cdot\vec r_2+{}_{21}\cdot\vec m_1+\ldots+{}_{2n}\cdot\vec m_n;\\
&\ldots\\
&\vec m_{n1}=-b_{11,n}\cdot\vec r_1-\frac{b_{12,n}}{G}\cdot\vec r_2+{}_{n1}\cdot\vec m_1+\ldots+{}_{n,n-1}\cdot\vec m_{n-1};\\
&\vec m_{12}=-b_{12,1}\cdot\vec r_1-\frac{b_{22,1}}{G}\cdot\vec r_2+{}_{12}\cdot\vec m_2+\ldots+{}_{1n}\cdot\vec m_n;\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\vec{m}_{n2} = -b_{12,n}\cdot\vec{r}_1 - \frac{b_{22,n}}{G}\cdot\vec{r}_2 + \ {}_{n1}\cdot\vec{m}_1 + \ldots + \ {}_{n,n-1}\cdot\vec{m}_{n-1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коэффициенты $\ {}_{ij} = (\vec{m}_{i1}, \vec{m}_j)$ и $\ {}_{ij} = (\vec{m}_{i2}, \vec{m}_j)$ называются коэффициентами кручения поверхности (1) при заданном ортонормированном базисе нормального пространства.

Легко видеть, что матрицы коэффициентов кручения

$$\begin{pmatrix} 0 & {}_{12} & \cdots & {}_{1n} \\ {}_{21} & 0 & \cdots & {}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}_{n1} & {}_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

и $\begin{pmatrix} 0 & {}_{12} & \cdots & {}_{1n} \\ {}_{21} & 0 & \cdots & {}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}_{n1} & {}_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

кососимметричны.

Предположим, что все коэффициенты кручения равны нулю. Рассмотрим двумерную поверхность в (n+2)-мерном евклидовом пространстве:

$$\vec{N} = \vec{m}_1(u_1, u_2) \in C^2, \qquad (25)$$

которую назовем сферическим образом поверхности (1) в направлении $\vec{m}_1$.

Предположим, что коэффициенты кручения поверхности (26) равны нулю. Установим связь между гауссовыми кривизнами поверхностей (1) и (25). Учитывая это обстоятельство, получаем, что система векторов $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \ldots, \vec{m}_n$ является базисом нормального пространства поверхности (25).

С учетом этого вычислим коэффициенты первой и вторых квадратичных форм сферического образа поверхности (1):

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}_{11} = -\tilde{b}_{11,1} = (\vec{m}_{11}, \vec{m}_{11}) = b_{11,1}{}^2 + \frac{b_{12,1}{}^2}{G^2};\\
&\tilde{g}_{12} = -\tilde{b}_{12,1} = (\vec{m}_{11}, \vec{m}_{12}) = b_{11,1}\cdot b_{12,1} + \frac{b_{12,1}\cdot b_{22,1}}{G^2};\\
&\tilde{g}_{22} = -\tilde{b}_{22,1} = (\vec{m}_{12}, \vec{m}_{12}) = b_{12,1}{}^2 + \frac{b_{22,1}{}^2}{G^2};\\
&\tilde{b}_{11,i} = -(\vec{m}_{11}, \vec{m}_{i1}) = -(b_{11,1}\cdot b_{11,i} + \frac{b_{12,1}\cdot b_{12,i}}{G^2});\\
&\tilde{b}_{12,i} = -(\vec{m}_{11}, \vec{m}_{i2}) = -(b_{11,1}\cdot b_{12,i} + \frac{b_{12,1}\cdot b_{22,i}}{G^2}) =\\
&-(\vec{m}_{12}, \vec{m}_{i1}) = -(b_{12,1}\cdot b_{11,i} + \frac{b_{22,1}\cdot b_{12,i}}{G^2});\\
&\tilde{b}_{22,k} = -(\vec{m}_{12}, \vec{m}_{k2}) = -(b_{12,1}\cdot b_{12,k} + \frac{b_{22,1}\cdot b_{22,k}}{G^2}.
\end{aligned} \qquad (26)$$

Вычислим

$$\begin{vmatrix} \tilde{b}_{11,i} & \tilde{b}_{12,i} \\ \tilde{b}_{21,i} & \tilde{b}_{22,i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(b_{11,1}\cdot b_{11,i} + \frac{b_{12,1}\cdot b_{12,i}}{G^2}) & -(b_{11,1}\cdot b_{12,i} + \frac{b_{12,1}\cdot b_{22,i}}{G^2}) \\ -(b_{12,1}\cdot b_{11,i} + \frac{b_{22,1}\cdot b_{12,i}}{G^2}) & -(b_{12,1}\cdot b_{12,i} + \frac{b_{22,1}\cdot b_{22,i}}{G^2}) \end{vmatrix} = K_1\cdot K_i.$$

Учитывая, что

$\begin{vmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{b}_{11,i} & \tilde{b}_{12,i} \\ \tilde{b}_{21,i} & \tilde{b}_{22,i} \end{vmatrix} = K_1{}^2$, окончательно получаем $\tilde{K} = 1 + \frac{K_2 + \ldots + K_n}{K_1} = \frac{K}{K_1}$.

Список литературы

1. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.