

Пыrkova Ольга Анатольевна

**О ПОСТАНОВКЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА
СТРАТИФИЦИРОВАННЫМ ПОТОКОМ**

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/2-1/31.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2010. № 2 (33): в 2-х ч. Ч. I. С. 82-86. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/2-1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

Цифровая фотокамера как устройство регистрации изображения

В последнее время все большее распространение получают цифровые фотокамеры (цифровые фотоаппараты). В отличие от пленочных, у цифровых фотоаппаратов приемником изображения является ПЗС-матрица (прибор с зарядовой связью), состоящая из светочувствительных элементов. Каждый ее элемент заряжается пропорционально интенсивности попавшей на него части изображения, а затем преобразуется в цифровое значение RGB. Значение RGB представляет собой совокупность уровней трех основных цветов красного, зеленого, синего и яркости. Их значения варьируются в пределах 0-255. Например, RGB значения белого цвета 255, 255, 255 при значении яркости 240.

Фотографическая разрешающая способность для цифровых камер определяется разрешающей способностью используемых ПЗС-матриц

Разрешающая способность матрицы характеризуется количеством элементов в миллионах пикселей. Так матрицы с небольшой разрешающей способностью состоят из 2 млн. (1600x1200) пикселей. При таком количестве элементов можно получить отпечаток на бумаге стандартного формата 10x15 см с разрешением примерно 10 лин/мм [2]. Видимый диаметр x/b пряжи с линейной плотностью 50 текс составляет 0,25 мм. Таким образом, разрешающая способность недорогих цифровых камер вполне достаточна для фиксации отдельных нитей на поверхности паковки.

Следует отметить, что в настоящее время практически все цифровые фотоаппараты имеют возможность снимать видеоролики. Использование режима видеосъемки вращающейся бобины позволит получить изображение меридионального сечения ее поверхности при разных углах ее поворота. Обычно цифровые фотоаппараты оснащаются стандартным портом USB для подключения к компьютеру. Это является большим плюсом при обработке отснятого материала, т.к. позволит непосредственно передавать полученный первичный материал в ЭВМ для обработки.

Таким образом, наиболее приемлемым устройством регистрации изображения для контроля геометрических параметров тела намотки, является цифровая фотокамера. Она имеет достаточное разрешение, позволяет снимать видеоролики с частотой до 30 кадров/с, передавать отснятый материал в компьютер через USB-порт.

Список литературы

1. **Видеофотокамера «Creative Video Blaster WebCam Go»** [Электронный ресурс]. URL: <http://www.ixbt.com/peripheral/creative-web-go.html>
2. **Особенности цифровых фотоаппаратов** [Электронный ресурс]. URL: http://aco.ifmo.ru/el_books/introduction_into_specialization/glava-4/glava-4-6.html

УДК 532.59

Ольга Анатольевна Пыркова

Московский физико-технический институт (государственный университет)

О ПОСТАНОВКЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА СТРАТИФИЦИРОВАННЫМ ПОТОКОМ[©]

Работа поддержана АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы", проект 2.1.1/500 и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы

В дальнейшем будем рассматривать задачу обтекания цилиндра потоком безграничной несжимаемой адиабатичной стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска и задачу обтекания цилиндрического препятствия на дне. Обтекание цилиндра в обоих случаях моделируется заданием соответствующих граничных условий.

Граничные условия в неограниченной жидкости

При решении задачи о возбуждении внутренних волн за препятствием в неограниченной жидкости нужно потребовать выполнения следующих граничных условий:

- **на теле**: условие обтекания поверхности идеальной жидкостью;
- **вдали от тела вверх по потоку**: отсутствие возмущений в набегающем потоке (условие излучения для стратифицированного течения);
- **вдали от тела по остальным направлениям**: затухание возмущения вдали.

Заметим, что при описании порождения внутренних волн движущимися в стратифицированной жидкости телами обычно вместо решения задачи обтекания тел решают задачи для тех или иных простых распределений источников (чаще всего массовых). Возможность подобного моделирования тел источниками при больших числах Фруда (больших скоростях движения, малых размерах тела, слабостратифицированной жидкости) предполагают на основе соображений аналогии со случаем однородной жидкости.

Обоснование такого моделирования и некоторые оценки его точности даны на примере горизонтального равномерного движения цилиндра в работе [3].

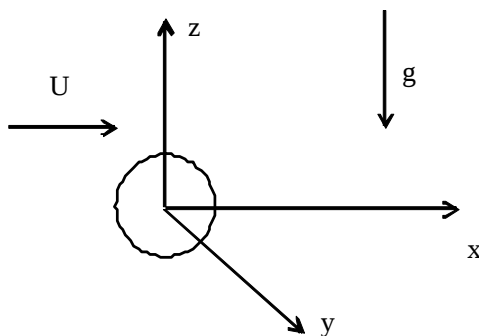


Рис. 1

Рассматривается следующая конфигурация (Рис. 1): ось неподвижного цилиндра коллинеарна оси ординат; скорость набегающего потока направлена по оси абсцисс; ось аппликат направлена противоположно силе тяжести [1]. Цилиндр моделируется (Рис. 2) **источником** (передний конец тела вытесняет жидкость [сопротивление]) и **стоком** (жидкость заполняет образовавшуюся пустоту [тяга]). Мощности источника и стока взаимно компенсируются.

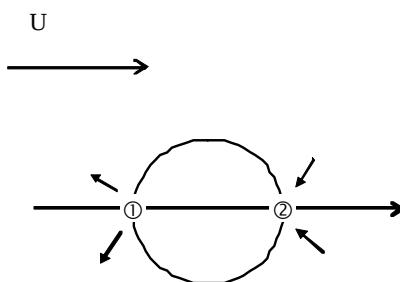


Рис. 2

Расход:

$$Q\Delta(x-a, y, z) - Q\Delta(x+a, y, z) = Q\left[\Delta(x, y, z) - a\frac{\partial}{\partial x}\Delta(x, y, z)\right] - Q\left[\Delta(x, y, z) + a\frac{\partial}{\partial x}\Delta(x, y, z)\right] =$$

$$= -Q2a\frac{\partial}{\partial x}\Delta(x, y, z) = -M\frac{\partial}{\partial x}\Delta(x, y, z),$$

где $M = Q2a$ - момент диполя, a - радиус тела.

Момент дублета (источник - сток) считается векторной величиной, направленной от стока к источнику.

Для плоского случая $M = 2 Ua^2$.

В пространственном случае $M = 2 UR^3$, где R - радиус обтекаемого шара [5].

Линейные граничные условия в жидкости конечной глубины.

При рассмотрении течения в канале конечной глубины граничными условиями будут:

- $x = -\infty$ - отсутствие возмущений;
- $z = z_0$ - твердое дно (т.е., вертикальная компонента скорости $w = 0$);
- на теле - обтекание заданной поверхности потоком идеальной жидкости;
- $z = h$ - свободная поверхность (наиболее важная с точки зрения сил, выступающих в качестве «возвращающих» сил, возникающих на границах области).

Пусть в состоянии равновесия поверхность жидкости является плоской ($z - h = 0$).

При выведении ее из этого положения существуют двоякого рода силы, стремящиеся вернуть поверхность в прежнее состояние:

☐ сила тяжести и

☐ сила поверхностного натяжения.

В результате на поверхности жидкости возникает возмущение, распространяющееся во все стороны в виде волны.

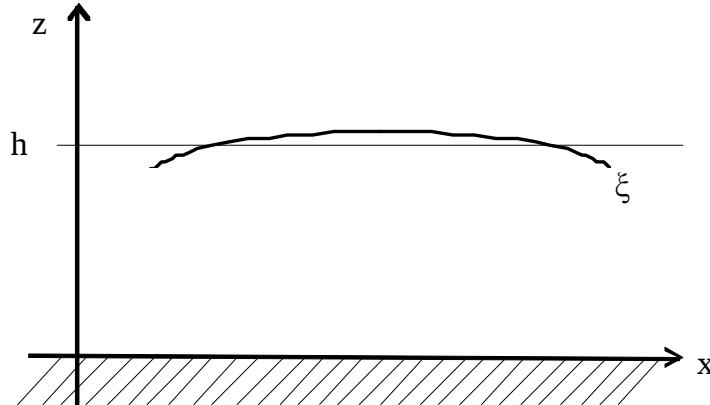


Рис. 3

Пусть возвышение возмущенной поверхности описывается выражением $\xi = \xi(x, y, t)$ (Рис. 3). Скорость возвышения поверхности $\frac{d\xi}{dt}$ должна совпадать с вертикальной скоростью частиц среды $w(x, y, t)$ на ней находящихся (поскольку частицы не могут ни опережать поверхность, ни отставать от нее), что можно записать в виде

$$w|_{z=\xi(x, y, t)} = \frac{d\xi}{dt} \quad (\kappa)$$

Это так называемое **кинематическое граничное условие** на свободной поверхности жидкости.

Во втором, **динамическом условии** на свободной поверхности жидкости учитывается наличие скачка давления по обе стороны от границы раздела сред, обусловленного силами поверхностного натяжения. Если давление в жидкости $p_0 + p'$, где $p_0 = p_0(\xi)$ представляет собой гидростатическую часть давления, а $p' = p'(x, y, \xi, t)$ - возмущение, вносимое волновым движением, а давление над поверхностью p_a , то по известной **формуле Лапласа** [4]:

$$p_0(\xi) + p'|_{z=\xi} - p_a = - \sigma R^{-1} \quad (\lambda)$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения, R^{-1} - сумма главных кривизн поверхности, равная для слабоизогнутой поверхности $z = h + \xi(x, y, t)$ (пренебрегаем нелинейными слагаемыми в разложении

$\frac{\nabla}{\sqrt{1+(\nabla \xi)^2}}$ в ряд около значения, соответствующего положению равновесия, $R^{-1} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$)

$$R^{-1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \nabla \left(\frac{\nabla \xi}{\sqrt{1+(\nabla \xi)^2}} \right) \quad (1)$$

где R_1, R_2 - главные радиусы кривизны в данной точке поверхности.

Если колебания свободной поверхности малы, то можем считать поверхность раздела плоской, то есть $R_1 = R_2 = R_3 = \infty$, и, соответственно, $R^{-1} = 0$, а динамическое граничное условие (д) принимает вид

$$p_0(\xi) + p'|_{z=\xi} - p_a = 0 \quad (\lambda^*)$$

Условия (к) и (д*) неудобны для применения из-за их нелинейности и из-за того, что они содержат изменяющуюся границу, положение которой неизвестно и которая сама подлежит определению как часть общего решения задачи. Для рассматриваемого здесь класса волн малой амплитуды эти трудности легко обойти с помощью линеаризации. Для свободных, невынужденных волн атмосферное давление p_a принимается постоянным, поэтому:

$$\frac{d}{dt}(p_0(z) + p'|_{z=0}) = \frac{dp_a}{dt} = 0$$

Применяя формулу для полной производной по времени $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \nabla)$ и пренебрегая нелинейными слагаемыми, в линейном приближении в стационарном случае получаем

$$U_0 \frac{\partial p'}{\partial x} + w \frac{dp_0}{dz} = 0 \quad (2)$$

С учетом уравнения гидростатики $\frac{dp_0}{dz} = -g_0(z)$ уравнение (2) принимает вид

$$U_0 \frac{\partial p'}{\partial x} - g_0 w = 0 \quad (3)$$

Применяя к последнему уравнению (3) оператор Лапласа $\Delta_- = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, получим

$$U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p' - g_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4)$$

Но линеаризованные уравнения гидродинамики дают [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = - \frac{\partial p'}{\partial x} \right) &\Rightarrow U_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \\ + \Rightarrow U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) &= - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p' \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = - \frac{\partial p'}{\partial y} \right) &\Rightarrow U_0 \frac{\partial^2 v'}{\partial y \partial x} = - \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5)$$

И учитывая уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $\nabla \vec{v} = 0$:

$$U_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p' \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получаем

$$U_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial z} = g_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w \quad (7)$$

или

$$\frac{U_0}{g} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w \quad (8)$$

Если перейти к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w / U_0; \\ \bar{x} &= x / h; \quad \bar{y} = y / h; \end{aligned} \quad (9)$$

то в граничном условии (8) возникает безразмерный параметр: поверхностное **число Фруда** $Fr = \frac{U_0^2}{gh}$.

При большой глубине потока $Fr \ll 1$, и приближенно, в нулевом порядке по Fr , граничное условие (8) упрощается:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w \cong 0 \quad \text{или} \quad w \cong 0 \quad (10)$$

Это условие «**твердой крышки**» для внутренних волн. Как будет показано дальше, граничное условие «твердой крышки» упрощает решение задачи и позволяет по полученному в этом приближении решению получить в первом приближении возмущенное поле на свободной поверхности, наведенное внутренней волной.

Заметим, что при рассмотрении задачи обтекания малой неровности дна потоком идеальной несжимаемой тяжелой экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины h свободная поверхность заменяется твердой крышкой, а стратификация предполагается устойчивой [2].

Декартова система координат выбирается так, чтобы плоскость x_0 была расположена на горизонтальной плоскости дна, а ось z направлена вертикально вверх. При $x \rightarrow -\infty$ поток асимптотически одномерный и течет с постоянной скоростью U в направлении оси x .

В качестве характерных величин берутся значения h , U и ρ_0 , где ρ_0 - средняя плотность одномерного потока.

В качестве независимых переменных берутся эйлеровы координаты x , y и лагранжева координата z , задающая при $x \rightarrow -\infty$ расстояние от горизонтального дна до невозмущенной линии тока, а в качестве зависимой переменной - эйлерова координата z .

При определенных ограничениях на форму неровности дна и режим обтекания дно есть поверхность постоянной плотности $\rho = \rho_0$. Для обоснования такой постановки рассматривается случай, когда неровность дна имеет форму одного выпуклого препятствия.

Поток называется **сильно стратифицированным**, если внутреннее число Фруда $Fr_i < 1$, и **слабо стратифицированным**, если $Fr_i > 1$

$$Fr_i = \frac{U}{Na}, \quad N^2 = -\frac{g}{\rho(z)} \frac{d\rho}{dz} \quad (11)$$

где N - частота Брента-Вайсяля, $\rho(z)$ - плотность невозмущенного потока, g - ускорение силы тяжести, a - высота препятствия.

Стратификация предполагается слабой, и для таких течений все частицы жидкости в невозмущенном потоке обладают достаточной кинетической энергией, чтобы подняться на вершину препятствия, преодолевая градиент плотности. Аналитически это означает, что для любого $z \in [0, a]$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{2} \rho(z) U^2 \geq g \int_z^a \left(\rho(a) - \rho(z) \right) \left(-\frac{d\rho}{dz} \right) dz \quad (12)$$

Действительно, если предположить, что неравенство (12) не выполняется при некотором $z_0 \in [0, a]$, то, используя монотонность функции $\rho(z)$, имеем

$$\frac{1}{2} \rho(z_0) U^2 < g \int_{z_0}^a \left(\rho(a) - \rho(z) \right) \left(-\frac{d\rho}{dz} \right) dz \leq \frac{1}{2} N^2 a^2 \rho(z_0)$$

откуда, вопреки предположению следует, что $Fr_i < 1$.

Если поток сильно стратифицирован, то появляется разделяющая линия тока $z = z_0$, которая находится из уравнения Шеппарда, получающегося из неравенства (12) заменой знака неравенства на знак равенства [9]. Многочисленные экспериментальные исследования подтверждают, что для широкого класса препятствий при $z > z_0$ траектории обходят препятствие сверху, как при обтекании препятствия потоком однородной жидкости, а при $z < z_0$ - сбоку, мало отклоняясь от горизонтальной плоскости.

При рассмотрении только слабо стратифицированных течений, как было показано, разделяющей линии тока нет, и картина траекторий, лежащих на дне, качественно имеет такой же вид, как и в случае однородной жидкости. Тогда закон сохранения плотности вдоль траектории приводит к выводу, что дно есть поверхность постоянной плотности.

Список литературы

1. Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В. Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью: препринт № 282. М.: ИПМ АН СССР, 1983.
2. Бежанов К. А., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М. Исследование дальнего и ближнего полей в задаче обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости / АН СССР // МЖГ. 1987. № 5. С. 86-94.
3. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Обтекание цилиндра потоком однородной стратифицированной жидкости // Современные вопросы механики сплошной среды: междувед. сборник. М.: МФТИ, 1985. С. 75-81.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: ГИФМЛ, 1963.
6. Пыркова О. А. О возможности приближенного учета действия вязкости в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики: междувед. сб. М., 1995. С. 154-165.
7. Пыркова О. А. О влиянии вязкости на затухание распространяющихся внутренних волн, возбужденных при обтекании препятствия на дне // Моделирование процессов управления и обработка информации: междувед. сб. М.: МФТИ, 1996. С. 182-189.
8. Пыркова О. А. Учет адиабатичности для волн в несжимаемой жидкости в линейном приближении // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2009. № 12 (31). С. 87-90.
9. Snyder W. H., Thompson R. S., Eskridge R. E. et al. The structure of strongly stratified flow over hills: dividing-streamline concept // Fluid Mech. 1985. V. 152. P. 249-288.