Щетинина Екатерина Владимировна

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МЕДЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СО СМЕНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2010. № 2 (33): в 2-х ч. Ч. I. C. 87-88. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/2-1/

УДК 517.4

Екатерина Владимировна Щетинина
Самарский государственный университет

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МЕДЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СО СМЕНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ©

При исследовании задач теории автоматического управления, механики, электротехники, химической кинетики и других областей науки широко используются системы нелинейных дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при старших производных. Основные трудности исследования таких систем заключаются в высокой размерности модели и наличии разнотемповых составляющих. При исследовании разнотемповых систем большую сложность представляют высокая чувствительность системы к малым изменениям параметров и зависимость управляющих значений параметров от малого параметра. Важную роль при качественном анализе таких систем играют методы, позволяющие сводить анализ исходной задачи к анализу более простой системы с меньшей размерностью. При этом упрощенная модель должна с достаточной степенью точности отражать поведение решений исходной системы.

Одним из основных методов исследования разнотемповых систем является метод интегральных многообразий. Под интегральным многообразием здесь понимается инвариантная поверхность дифференциальной системы. Использование интегральных многообразий позволяет понижать размерность системы и избавляться от вычислительной жесткости [3].

В [4] рассматривается задача о существовании медленных интегральных многообразий для систем вида

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \ \ Y(t,y,z,\ \ ), \\ \frac{dz}{dt} &= B(t)z + Z(t,y,z,a(y,\ \ ),\ \ ) + a(y,\ \ ), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $y \in R^n, z \in R^2$, – малый положительный параметр, a – функция управления, $B(t)$ – матрица вида

$$B(t) = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ -1 & 2t \end{pmatrix}.$$

Предположим, что функции Y и Z непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных до порядка k включительно, функции и все производные непрерывны, равномерно ограничены и удовлетворяют условиям Липшица по всем переменным с некоторыми положительными константами.

Собственные числа матрицы $B(t)$ имеют отрицательные вещественные части при $t<0$ и положительные вещественные части при $t>0$. Поэтому основное предположение теории интегральных многообразий нарушается. Для того, чтобы исходная система имела медленное интегральное многообразие, в систему вводится дополнительная функция $a(y,\ \ )$, которая играет роль функции управления. Было доказано [4], что при выполнении этих условий для достаточно малых значений существует единственная функция $a(y,\ \ )$, при которой система (1) имеет медленное интегральное многообразие вида $z = h(t,y,\ \ )$. Функция $a(y,\ \ )$ разыскивается в классе непрерывных, равномерно ограниченных функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной y. Для доказательства существования интегрального многообразия построим оператор над пространством непрерывных, равномерно ограниченных, липшицевых функций $h(t,y,\varepsilon)$

$$(Th)(t,y,\ \ ) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} V(t-s)[Z(\cdot) + a(\ \ (s,y),\ \ )]ds, t \le 0, \\ -\int_{t}^{+\infty} V(t-s)[Z(\cdot) + a(\ \ (s,y),\ \ )]ds, t > 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где $Z(\cdot) = Z(s,\ \ (s,y), h(s,\ \ (s,y),\ \ ), a(\ \ (s,y),\ \ ))$, $V(t\text{-}s)$ – фундаментальная матрица уравнения $\dot{z} = B(t)z$, а (t,y) - решение начальной задачи

$$\frac{d}{ds} = Y(s,\ \ ,h(s,\ \ ,\ \ ),\ \ ),\ \ (t) = y .$$

В верхней строке (2) записан оператор, используемый для доказательства существования интегрального многообразия при $t \to -\infty$, а в нижней строке – оператор, используемый для доказательства существования интегрального многообразия при $t \to +\infty$ [1].

Показывается, что этот оператор является сжимающим в метрическом пространстве. Следовательно, по принципу сжимающих отображений, существует единственная неподвижная точка оператора T. Соответствующая функция описывает медленное интегральное многообразие системы (1). Получившееся медленное интегральное многообразие является притягивающим при $t<0$ и отталкивающим при $t>0$.

Для решений, не лежащих на многообразии, наблюдается эффект, близкий к эффекту затягивания потери устойчивости [2]. Решения, начинающиеся при $t<0$, достаточно быстро попадают в малую окрестность притягивающего участка медленного интегрального многообразия и находятся в ней до момента $t=0$. Однако при $t>0$ решения не сразу покидают малую окрестность медленной поверхности, а остаются в ней еще некоторое время, затем происходит срыв с медленного многообразия. Заметим, что чем больше времени решение проводит в окрестности притягивающего участка медленной поверхности, тем позднее произойдет срыв с отталкивающего участка медленной поверхности.

В большинстве задач найти явный вид функций $a(y,\ ), h(t,y,\ )$ не представляется возможным. В то же время интенсивное применение дифференциальных уравнений в качестве математических моделей широкого круга задач требует разработки методов их исследования, позволяющие получить с достаточной точностью различные свойства рассматриваемой задачи. Одним из наиболее эффективных методов являются асимптотические методы, которые ставят своей задачей получение формулы, описывающей качественное поведение решения на некотором промежутке изменения независимого переменного. Будем искать приближения медленного интегрального многообразия $h(t,y,\ )$ и склеивающей функции $a(y,\ )$ для системы (1) в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра

$$h(t,y,\ )=\sum_{i=1}^{k}{}^{i}h_i(t,y)+O(\ ^{i}),\ a(y,\ )=\sum_{i=1}^{k}{}^{i}a_i(y)+O(\ ^{i}), \tag{3}$$

Для определения коэффициентов разложения подставим формулы (3) в (1). Пользуясь дифференцируемостью функций из правой части (1), разложим правую часть в ряд по степеням малого параметра. Функции $h_i(t,y)$ ищутся как ограниченные на всей оси решения получившихся уравнений [5], а коэффициенты $a_i(y)$ определяются из условий непрерывности $h_i(t,y)$ при $t=0$.

Таким образом, получаются рекуррентные соотношения, позволяющие определять приближения любой степени точности. Для обоснования асимптотического характера разложения (3) исходная система приводится в окрестности k-того приближения медленного многообразия к виду (1), далее показывается, аналогично тому, как это было сделано в [4], что система в окрестности k-того приближения имеет медленное интегральное многообразие, определяемое операторным соотношением (2).

Список литературы

1. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
2. **Нейштадт А. И.** О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. С. 2060-2067; 1988. Т. 24. С. 226-233.
3. **Стрыгин В. В., Соболев В. А.** Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988, 256 с.
4. **Schneider K. R., ShchetininaE. V., Sobolev V. A.** Control of integral manifolds loosing their attractivity in time // J. of Math. Anal. and Appl. Iss. 2. V. 315. 2006. P. 740-757.
5. **Shchetinina E. V.** On existence of a bounded solution in a problem with a control parameter // Stab. and Control. Theory and Appl. No. 2. Vol. 6. 2004. P. 94-101.