

Онуфриева Нэлли Петровна, Пыркова Ольга Анатольевна

ПЕРЕХОД К ПОЛЯРНЫМ КООРДИНАТАМ В МОДЕЛИ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/3-1/9.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2010. № 3 (34): в 2-х ч. Ч. I. С. 42-45. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/3-1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

12. Лобанов И. Е., Штейн Л. М. Указ. соч. Т. II. Математическое моделирование интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в каналах с применением неосновных аналитических и численных методов. 290 с.
13. Мигай В. К. Моделирование теплообменного энергетического оборудования. Л.: Энергоатомиздат (Ленинградское отделение), 1987. 263 с.
14. Невский А. С. Лучистый теплообмен в печах и топках. М.: Металлургия, 1971. 198 с.
15. Промышленные теплотехнологии: в 5 т. / под общ. ред. А. П. Несенчука, В. И. Тимошпольского. Минск: Вышэйшая школа, 1995-2000. 1812 с.
16. Расчёты нагревательных и термических печей / С. Б. Василькова, М. М. Генкина, В. Л. Гусовский и др.; под ред. В. М. Тымчака и В. Л. Гусовского. М.: Металлургия, 1983. 326 с.
17. Тебеньков Б. П. Рекуператоры для промышленных печей. М.: Металлургия, 1975. 182 с.
18. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах / Ю. И. Розенгарт, Б. В. Потапов, В. М. Ольшанский и др. Киев: Вища школа, 1986. 232 с.
19. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах / В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, А. Б. Стеблов и др. Минск: Вышэйшая школа, 1992. 314 с.
20. Тимошпольский В. И. Теплотехнологические основы металлургических процессов и агрегатов высшего технического уровня. Минск: Навука і тэхніка, 1995. 263 с.
21. Хаузен Х. Теплопередача при противотоке, прямотоке и перекрёстном токе. М.: Энергоиздат, 1981. 384 с.
22. Юсфин Ю. С., Пашков Н. Ф. Металлургия железа. М.: ИКЦ «Академкнига», 2007. 464 с.
23. Dreitzer G. A., Lobanov I. E. Modelling of heat transfer and hydraulic resistance of turbulent gas and liquid flow in tubes with circular turbulizers // International journal of heat exchangers. 2006. V. VII. № 2. P. 231-249.

УДК 532

Нэллі Петровна Онуфриева, Ольга Анатольевна Пыркова

ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

ПЕРЕХОД К ПОЛЯРНЫМ КООРДИНАТАМ В МОДЕЛИ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА[©]

Работа поддержана АВИЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/500 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы

В настоящей работе рассматривается плоская задача о движении кругового цилиндра с горизонтальной образующей в поле силы тяжести.

Здесь x, y - декартовы прямоугольные координаты в плоскости перпендикулярной образующей цилиндра, $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$, $\mathbf{u} = (u, v) = (u_r, u_\theta)$ - вектор скорости в декартовой прямоугольной и полярной системах координат соответственно; g - положительная постоянная; $\mathbf{f}_g = (0, -g)$, g - ускорение свободного падения; P - заданное давление.

В задаче обтекания горизонтального цилиндра, в уравнении движения [1]

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_g - \frac{1}{r} \nabla P \quad (1)$$

естественно перейти к полярным координатам

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (2)$$

центр которой расположен на оси цилиндра, а полярный угол θ отсчитывается от положительного направления оси абсцисс декартовой прямоугольной системы координат.

Согласно [3] уравнение (1) в полярных координатах принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{3u_r}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_r}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u^2}{r} + \frac{u_r^2}{2r} - \\ - \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) = -g \sin \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{u}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{3u_\theta}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{3u_r u_\theta}{2r} - \\ - \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right) = -g \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (3)$$

Однако в ряде случаев компоненты скорости удобнее в виде проекций на оси декартовой прямоугольной системы координат, а не полярной, как в (3). Учитывая связь между компонентами скорости в обеих системах координат:

$$u_r = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad u_\alpha = -u \sin \alpha + v \cos \alpha, \quad (4)$$

преобразуем (3) к требуемому виду.

При замене (4) первое уравнение системы (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial t} \sin \alpha + \\ & + \frac{3u \cos^2}{2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{3u \sin \alpha \cos \alpha}{2} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{3v \sin \alpha \cos \alpha}{2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{3v \sin^2}{2} \frac{\partial v}{\partial r} + \\ & + \left(\frac{v \cos^2}{r} - \frac{3u \sin \alpha \cos \alpha}{2r} - \frac{v \sin^2}{2r} \right) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \\ & + \left(-\frac{u \sin^2}{r} + \frac{u \cos^2}{2r} + \frac{3v \sin \alpha \cos \alpha}{2r} \right) \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \\ & - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \\ & + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{2 \sin \alpha}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{2 \cos \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \\ & \left. + \frac{2 \sin \alpha}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{2 \cos \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = -g \sin \alpha - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5)$$

а второе уравнение системы (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial u}{\partial t} \sin \alpha + \frac{\partial v}{\partial t} \cos \alpha + \\ & + \left(-\frac{3u \sin \alpha \cos \alpha}{2} + \frac{v \cos^2}{2} - v \sin^2 \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \\ & + \left(-\frac{u \sin^2}{2} + \frac{3v \sin \alpha \cos \alpha}{2} + u \cos^2 \right) \frac{\partial v}{\partial r} + \\ & + \left(\frac{3u \sin^2}{2r} - \frac{3v \sin \alpha \cos \alpha}{2r} \right) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \left(-\frac{3u \sin \alpha \cos \alpha}{2r} + \frac{3v \cos^2}{2r} \right) \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \\ & - \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin \alpha + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \right. \\ & - \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{2 \cos \alpha}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{2 \sin \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \\ & \left. + \frac{2 \cos \alpha}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = -g \cos \alpha - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

Вычтем из уравнения (5), умноженного на $\cos \alpha$, уравнение (6), умноженное на $\sin \alpha$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \\ & + \left(\frac{3u \cos^3}{2} + v \sin \alpha \cos^2 \alpha + v \sin^3 \alpha \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{u \sin \alpha \cos^2}{2} + \frac{u \sin^3}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial r} + \\ & + \left(-\frac{3u \sin \alpha}{2r} + \frac{v \cos \alpha}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \left(\frac{u \cos \alpha}{2r} \right) \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \\ & - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \sin \alpha - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \cos \alpha \end{aligned}$$

Последнее выражение после несложных тригонометрических преобразований, преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{3u \cos}{2} + v \sin \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{u \sin}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial r} + \\ & + \left(-\frac{3u \sin}{2r} + \frac{v \cos}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \left(\frac{u \cos}{2r} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\ & - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \sin - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \cos \end{aligned} \quad (7)$$

Если теперь сложить уравнение (5), умноженное на $\sin$, с уравнением (6), умноженным на $\cos$, то получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} (\sin^2 + \cos^2) + \left(\frac{2v \sin^2 \cos}{2} + \frac{v \sin^2 \cos}{2} + \frac{v \cos^3}{2} - v \sin^2 \cos \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \\ & + \left(\frac{2u \sin^2 \cos}{2} + \frac{u \sin^2 \cos}{2} + \frac{3v \sin}{2} - \frac{u \sin^2 \cos}{2} + u \cos^3 \right) \frac{\partial v}{\partial r} + \\ & + \left(-\frac{v \sin}{2r} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \left(-\frac{u \sin}{r} + \frac{3v \cos}{2r} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \\ & = -g - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \cos - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \sin \end{aligned}$$

из которого после тригонометрических преобразований имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{v \cos}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{3v \sin}{2} + u \cos \right) \frac{\partial v}{\partial r} + \\ & + \left(-\frac{v \sin}{2r} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \left(-\frac{u \sin}{r} + \frac{3v \cos}{2r} \right) \frac{\partial v}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \\ & = -g - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \cos - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \sin \end{aligned} \quad (8)$$

Следует отметить, что уравнения (7)-(8) можно получить непосредственно из уравнения (1), записав его в покомпонентном виде в декартовой прямоугольной системе координат:

$$u_t + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \frac{u}{2} (u_x + v_y) - \Delta u = -\frac{1}{2} P_x,$$

$$v_t + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v + \frac{v}{2} (u_x + v_y) - \Delta v = -g - \frac{1}{2} P_y,$$

или

$$u_t + \frac{3}{2} u u_x + v u_y + \frac{1}{2} u v_y - \Delta u = -\frac{1}{2} P_x, \quad (9)$$

$$v_t + u v_x + \frac{1}{2} v u_x + \frac{3}{2} v v_y - \Delta v = -g - \frac{1}{2} P_y \quad (10)$$

Рассмотрим теперь компоненты скорости как сложные функции от $x(r, \theta)$ и $y(r, \theta)$:

$$u = u(x, y) = u(x(r, \theta), y(r, \theta)), \quad v = v(x, y) = v(x(r, \theta), y(r, \theta)).$$

Тогда пользуясь правилом дифференцирования сложной функции [4] и учитывая (2), получим

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad (11)$$

$$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta. \quad (12)$$

$$v_r = v_x x_r + v_y y_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, \quad (13)$$

$$v_\theta = v_x x_\theta + v_y y_\theta = -v_x r \sin \theta + v_y r \cos \theta. \quad (14)$$

Умножая (11) на $\cos \theta$ и складывая с (12), умноженным на $-\frac{\sin \theta}{r}$, получим

$$u_x = u_r \cos \theta - u \frac{\sin \theta}{r}, \quad (15)$$

а, умножив (11) на $\sin \theta$ и сложив с (12), умноженным на $\frac{\cos \theta}{r}$, получим

$$u_y = u_r \sin \theta + u \frac{\cos \theta}{r}. \quad (16)$$

Аналогично получим:

$$v_x = v_r \cos \varphi - v \frac{\sin \varphi}{r}, \quad (17)$$

$$v_y = v_r \sin \varphi + v \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (18)$$

Учитывая вид оператора Лапласа в полярных координатах [2; 3; 4]

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u, \quad \Delta v = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v. \quad (19)$$

и выражения (15)-(18), преобразуем (9) и (10) к виду

$$u_t + \frac{3}{2} u \left(u_r \cos \varphi - u \frac{\sin \varphi}{r} \right) + v \left(u_r \sin \varphi + u \frac{\cos \varphi}{r} \right) + \frac{1}{2} u \left(v_r \sin \varphi + v \frac{\cos \varphi}{r} \right) - \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u \right) = , \quad (20)$$

$$= -\frac{1}{r} \left(P_r \cos \varphi - P \frac{\sin \varphi}{r} \right) \\ v_t + u \left(v_r \cos \varphi - v \frac{\sin \varphi}{r} \right) + \frac{1}{2} v \left(u_r \cos \varphi - u \frac{\sin \varphi}{r} \right) + \frac{3}{2} v \left(v_r \sin \varphi + v \frac{\cos \varphi}{r} \right) - \left(v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v \right) = , \quad (21)$$

$$= -g - \frac{1}{r} \left(P_r \sin \varphi + P \frac{\cos \varphi}{r} \right)$$

совпадающему с (7), (8).

Список литературы

1. **Ипатов В. М.** Исследование задачи, возникающей при вариационном построении решений системы Навье-Стокса // Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения»: тезисы докладов. Новосибирск: НГУ, 2007. С. 163-164.
2. **Кочин Н. Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Издательство Академии наук СССР, 1961.
3. **Пыrkova О. А., Онуфриева Н. П.** Замена переменных в модели обтекания цилиндра // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2010. № 1 (32): в 2-х ч. Ч. 1. С. 22-29.
4. **Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.** Курс математического анализа. М.: Изд-во МФТИ, 1997.

УДК 656.6

Эдуард Анатольевич Пиль, Михаил Эдуардович Пиль
Петербургский государственный университет путей сообщения
Ростовский колледж радиоэлектроники и связи

АНАЛИЗ СИСТЕМ КООРДИНАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ[©]

С развитием рыночных отношений в нашей стране и увеличением перевозок как из дальнего, так и из ближнего зарубежья для бизнесменов остро встает вопрос о получении информации где территориально находится их груз, т.е. получение информации в режиме on-line. Этот же вопрос стоит и перед большими авто-транспортными предприятиями, которые занимаются перевозкой населения. Поэтому, после появления спутниковых систем позиционирования, позволяющих определять местоположения объекта с большой точностью, стали появляться на рынке и соответствующие устройств, позволяющие получать координаты местоположения объекта. В настоящее время запущены или находятся в разработке следующие системы спутниковой навигации:

1. GPS мониторинг системы навигации и мониторинга транспорта (разработка США) [1];
2. ГЛОНАСС, полностью должна заработать в 2013 г. (разработчик Россия) [2];
3. Галилео, полностью должна заработать в 2015 г. (европейская разработка) [3];
4. Бэйдоу, полностью должна заработать в 2020 г. (разработка Китая) [4].