

Пыrkova Ольга Анатольевна

**СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА К УРАВНЕНИЮ ДЛЯ
ВЕРТИКАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ СКОРОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ СЛУЧАЕ**

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/5/24.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2010. № 5 (36). С. 66-69. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/5/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

4. Линьков В. М., Яремко Н. Н. Высшая математика в примерах и задачах: компьютерный практикум. М.: Финансы и статистика, 2006. 320 с.
5. Ноговицина О. В. Формирование готовности студентов университета к самообучению в процессе математической подготовки: дисс. ... канд. пед. наук. Челябинск, 2008. 202 с.
6. Ноговицина О. В., Сиденко О. А. Система микроконтрольных работ в процессе непрерывного математического образования. Магнитогорск, 2010. 202 с.

УДК 532.1

Ольга Анатольевна Пыркова

Московский физико-технический институт (государственный университет)

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА К УРАВНЕНИЮ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ СКОРОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ СЛУЧАЕ®

*Работа поддержана АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы»,
проект 2.1.1/500 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры
инновационной России» на 2009 - 2013 годы.*

В настоящей работе рассматривается получение одного уравнения для вертикальной компоненты скорости из системы уравнений обтекания цилиндра в пространственном случае.

Непрерывную стратификацию в среде можно представить, как наложение друг на друга большого числа тонких слоев, плотность которых различна.

Тогда на каждой границе между этими слоями при возникновении возмущения поверхности раздела будет создаваться и распространяться гравитационная поверхностная волна (как на поверхности раздела между водой и атмосферой).

При стремлении числа слоев к бесконечности (их толщины, соответственно, к нулю) и стремлении разрыва плотности жидкости между слоями к нулю получим непрерывное распределение плотности по высоте, а совокупность возникающих возмущений и будет представлять собой **внутреннюю волну**.

В стратифицированной, но не вращающейся жидкости возвращающая сила существует только благодаря плавучести. Колебания относительно устойчивого состояния называются **внутренними гравитационными волнами**, что отражает как их динамическое происхождение, так и тот факт, что они возникают внутри жидкости, а не на верхней свободной поверхности разрыва плотности в отличие от более известных поверхностных гравитационных волн.

Заметим, что внутренние волны возникают при обтекании препятствий [4] и при движении тела в стратифицированной среде [2; 5; 6; 7; 11].

Как и в предыдущих работах [8; 9; 10] рассматриваем стационарный случай.

Выпишем линеаризованные уравнения гидродинамики несжимаемой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска

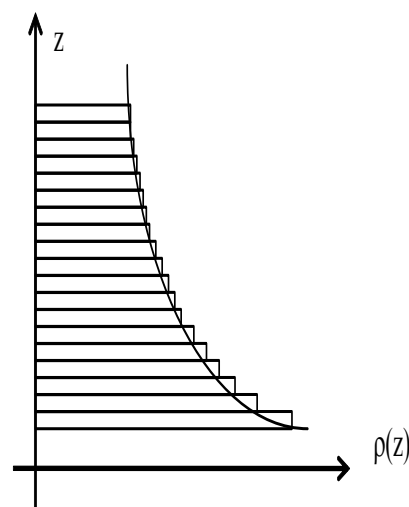
$$U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + f_x \quad (1.1)$$

$$U_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + f_y \quad (1.2)$$

$$U_0 \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\rho_0} + f_z \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

$$U_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \rho_0 \frac{w'}{g} N^2 \quad (1.5)$$



Отметим следующие **перспективы моделирования обтекания тела стратифицированным потоком**:

• Иногда форму обтекаемого тела моделируют с помощью задания системы источников и стоков [2] на оси потока или с помощью диполя (например, для шара), полагая, что вблизи тела течение будет близким к течению в однородной среде, что оправдано при преобладании инерционных свойств течения (больших значениях внутреннего числа Фруда $\frac{U^2}{N^2 d^2} > 1$). Для шара уравнение неразрывности принимает вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{M}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x, y, z), \quad (2)$$

здесь M - момент диполя.

•• Для автоматического учета условия излучения (выбора при решении направления обхода контуров в комплексной плоскости) можно использовать [1] искусственный прием - введение в уравнения движения искусственной вязкости по Релею μ_1 :

$$U_0 \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \mu_1 \vec{v} - g \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla z, \quad (3.1-3)$$

с последующим предельным переходом $\mu_1 \rightarrow 0$.

••• То же справедливо, если оставить в уравнениях движения нелинейные слагаемые, соответствующие уравнениям Навье-Стокса:

$$U_0 \nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \Delta \vec{v} - g \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla z, \quad (4.1-3)$$

здесь ν - кинематический коэффициент вязкости.

Уравнения гидродинамики с учетом искусственной вязкости по Релею (приближение ••) и наличия диполей (приближение •) принимают вид:

$$U_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} - \mu_1 u' \quad (5.1)$$

$$U_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} - \mu_1 v' \quad (5.2)$$

$$U_0 \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\rho_0} - \mu_1 w' \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{M}{\rho_0} \delta'_x(x, y, z) \quad (5.4)$$

$$U_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \rho_0 \frac{w'}{g} N^2 \quad (5.5)$$

Замечание. Вспоминая, что

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v}, \quad \vec{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z),$$

$$\Omega_x = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

Из $\frac{\partial}{\partial y}$ (5.1) - $\frac{\partial}{\partial x}$ (5.2) получаем:

$$U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial y \partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial y} - \mu_1 \left(\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} \right) = -\mu_1 \Omega_z.$$

Если в набегающем потоке не было сопротивления завихренности Ω_z , то течение в плоскости x, y потенциальное [12].

Из $\frac{\partial}{\partial z}$ (5.1) - $\frac{\partial}{\partial x}$ (5.3) получаем:

$$U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial z \partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial z} - \mu_1 \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + g \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = -\mu_1 \Omega_y + g \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x}.$$

Так как $\rho' = \xi \frac{d\rho_0}{dz}$, $g \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \xi = -N^2 \xi$, то при $\mu_1 = 0$ получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_0 \Omega_y + \xi N^2) = 0.$$

Таким образом, учитывая отсутствие смещения при $x = -\infty$, линии равного уровня смещения относительно равновесия - линии равной завихренности!!!

$$\Omega_y = -\xi \frac{N^2}{U_0}.$$

Получим теперь уравнение для вертикальной компоненты скорости w' , исключив p' , ρ' , u' и v' из системы (5).

Из (5.4):

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} - \frac{M}{\rho_0} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \quad (6)$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial y}(2) \right]:$$

$$\rho_0 U_0 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y \partial x} \right) = -\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} - \rho_0 \mu_1 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \quad (7)$$

Подставим (7) в (6) $\cdot \rho_0 U_0$:

$$\rho_0 U_0 \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} + U_0 M \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \rho_0 \mu_1 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \quad (8)$$

Теперь подставим (5) в $\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}$ (3):

$$\rho_0 U_0 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial z} + \rho_0 \mu_1 \frac{\partial w'}{\partial x} = -g \frac{\partial \rho'}{\partial x} = -g \left(\frac{1}{U_0} \frac{\rho_0 w' N^2}{g} \right) = \frac{\rho_0 w' g}{U_0} \frac{d \rho_0}{\rho_0 d z} = \frac{w' g}{U_0} \frac{d \rho_0}{d z} \quad (9)$$

поскольку $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d \rho_0}{d z}$ - частота Вайся для несжимаемой среды.

Из (9):

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial z} = -\rho_0 U_0 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} - \rho_0 \mu_1 \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\rho_0 w' N^2}{U_0} \quad (10)$$

Подставляя (10) в $\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}$ (8):

$$\begin{aligned} \rho_0 U_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} + U_0 M \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^3 \partial z} = \\ = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(-\rho_0 U_0 \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} - \rho_0 \mu_1 \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\rho_0 w' N^2}{U_0} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \rho_0 \mu_1 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\begin{aligned} \rho_0 U_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w' + \frac{\rho_0}{U_0} N^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w' + U_0 M \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^3 \partial z} = \\ = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(-\rho_0 \mu_1 \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \rho_0 \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(-\frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{M}{\rho_0} \frac{\partial \delta}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

и окончательно:

$$\begin{aligned} \rho_0 U_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w' + \frac{\rho_0}{U_0} N^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w' + \\ + \rho_0 \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w' = \\ = -U_0 M \frac{\partial^4 \delta}{\partial x^3 \partial z} - \mu_1 \frac{\partial^3 \delta}{\partial x^2 \partial z} \end{aligned} \quad (12)$$

Вывод уравнения Гельмгольца с учетом вязкости среды для плоского случая достаточно подробно приведен в работе [8].

Список литературы

1. Бежанов К. А., Заец П. Г., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М. Пространственная задача обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины / Изд. АН СССР // МЖГ. 1990. № 3. С. 101-111.
2. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982.
3. Городцов В. А., Теодорович Э. В. Обтекание цилиндра потоком однородной стратифицированной жидкости // Современные вопросы механики сплошной среды: междувед. сборник. М.: Изд. МФТИ, 1985. С. 75-81.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика / ГИФМЛ. М., 1963.
5. Краусс В. Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
6. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
8. Пыркова О. А. О возможности приближенного учета действия вязкости в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики: междувед. сб. МФТИ. М., 1995. С. 154-165.
9. Пыркова О. А. О влиянии вязкости на амплитуду внутренних волн в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. ст. 9-й Всероссийской научной конференции. 28-29 ноября 2008 г.: в 3 т. / НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. ред. В. О. Каледина. Новокузнецк, 2008. Т. 1. С. 112-117.
10. Пыркова О. А. О постановке граничных условий в задаче обтекания цилиндра стратифицированным потоком // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2010. № 2 (33): в 2-х ч. Ч. 1. С. 82-86.
11. Филипс О. Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969.
12. John W. Miles. Internal waves generated by a horizontally moving source // Geoph. fluid dyn. 1971. Vol. 2. P. 63-87.

УДК 517.442

Людмила Геннадьевна Устинова, Наталья Геннадьевна Ходырева

ГОУ ВПО «Московский энергетический институт» (технический университет) в г. Волжском

ПЕРЕХОД К ЛАПЛАС-ОБРАЗАМ ПРИ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ АСР[©]

Построение математической модели, всесторонне охватывающей физический процесс или явление, в некоторых случаях приводит к сложным и громоздким соотношениям. Поэтому решающую роль в математическом моделировании играет правильный выбор модели, которая была бы не слишком сложна и учитывала интересующую сторону рассматриваемого процесса.

Исследование автоматической системы регулирования (АСР) осуществляется посредством дифференциальных уравнений, которые определяют сущность происходящих процессов в системе независимо от принципов ее действия, назначения, конструкции. Нахождение и аналитическое решение дифференциального уравнения существенно упрощается при использовании прикладных математических методов операционного исчисления.

Дифференциальное уравнение элемента регулирующей системы в общем случае имеет вид:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad (1)$$

где y - выходная величина элемента (в отклонениях от состояния равновесия); x - входная величина элемента (в отклонениях от состояния равновесия); $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_2, b_1, b_0$ - постоянные коэффициенты, определяемые особенностями и параметрами настройки элемента.

Для решения дифференциального уравнения (1) построим Лаплас-образы функций времени $y(t)$ и $x(t)$:

$$y(t) \stackrel{\cdot}{=} Y(p), \quad x(t) \stackrel{\cdot}{=} X(p),$$

и перейдем от дифференциального уравнения (1) к алгебраическому относительно изображения при нулевых начальных условиях, обычных для большинства АСР. В данном случае операционный метод облегчает отыскание требуемых функций времени, так как преобразование Лапласа превращает одну из независимых переменных (по которой производится преобразование) в параметр, понижая тем самым число этих переменных на единицу.