Вывод уравнения Гельмгольца с учетом вязкости среды для плоского случая достаточно подробно приведен в работе [8].

Список литературы

1. **Бежанов К. А., Заец П. Г., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М.** Пространственная задача обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины / Изд. АН СССР // МЖГ. 1990. № 3. С. 101-111.
2. **Бреховских Л. М., Гончаров В. В.** Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982.
3. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Обтекание цилиндра потоком однородной стратифицированной жидкости // Современные вопросы механики сплошной среды: междувед. сборник. М.: Изд. МФТИ, 1985. С. 75-81.
4. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика / ГИФМЛ. М., 1963.
5. **Краусс В.** Внутренние волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 272 с.
6. **Лайтхилл Д.** Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.
7. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
8. **Пыркова О. А.** О возможности приближенного учета действия вязкости в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики: междувед. сб. МФТИ. М., 1995. С. 154-165.
9. **Пыркова О. А.** О влиянии вязкости на амплитуду внутренних волн в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. ст. 9-й Всероссийской научной конференции. 28-29 ноября 2008 г.: в 3 т. / НФИ ГОУ ВПО «КемГУ»; под общ. ред. В. О. Каледина. Новокузнецк, 2008. Т. 1. С. 112-117.
10. **Пыркова О. А.** О постановке граничных условий в задаче обтекания цилиндра стратифицированным потоком // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2010. № 2 (33): в 2-х ч. Ч. 1. С. 82-86.
11. **Филипс О.** Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969.
12. **John W. Miles.** Internal waves generated by a horizontally moving source // Geoph. fluid dyn. 1971. Vol. 2. P. 63-87.

УДК 517.442

Людмила Геннадьевна Устинова, Наталья Геннадиевна Ходырева
ГОУ ВПО «Московский энергетический институт» (технический университет) в г. Волжском

ПЕРЕХОД К ЛАПЛАС-ОБРАЗАМ ПРИ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ АСР©

Построение математической модели, всесторонне охватывающей физический процесс или явление, в некоторых случаях приводит к сложным и громоздким соотношениям. Поэтому решающую роль в математическом моделировании играет правильный выбор модели, которая была бы не слишком сложна и учитывала интересующую сторону рассматриваемого процесса.

Исследование автоматической системы регулирования (АСР) осуществляется посредством дифференциальных уравнений, которые определяют сущность происходящих процессов в системе независимо от принципов ее действия, назначения, конструкции. Нахождение и аналитическое решение дифференциального уравнения существенно упрощается при использовании прикладных математических методов операционного исчисления.

Дифференциальное уравнение элемента регулирующей системы в общем случае имеет вид:

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=$$

$$=b_m\frac{d^m x}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\ldots+b_2\frac{d^2x}{dt^2}+b_1\frac{dx}{dt}+b_0x\,, \qquad (1)$$

где y - выходная величина элемента (в отклонениях от состояния равновесия); x - входная величина элемента (в отклонениях от состояния равновесия); $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_2, b_1, b_0$ - постоянные коэффициенты, определяемые особенностями и параметрами настройки элемента.

Для решения дифференциального уравнения (1) построим Лаплас-образы функций времени $y(t)$ и $x(t)$:

$$y(t) \;{}_{\bullet}\!\!=^{\bullet}\; Y(p)\,,\;\; x(t) \;{}_{\bullet}\!\!=^{\bullet}\; X(p),$$

и перейдем от дифференциального уравнения (1) к алгебраическому относительно изображения при нулевых начальных условиях, обычных для большинства АСР. В данном случае операционный метод облегчает отыскание требуемых функций времени, так как преобразование Лапласа превращает одну из независимых переменных (по которой производится преобразование) в параметр, понижая тем самым число этих переменных на единицу.

По теореме о дифференцировании оригинала с учетом нулевых начальных условий $\frac{d^n y}{dt^n} \risingdotseq p^n Y(p)$, $\frac{d^m x}{dt^m} \risingdotseq p^m X(p)$ для всех значений n и m. Тогда алгебраическое уравнение, равносильное дифференциальному уравнению (1) примет вид:

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \ldots + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) =$$
$$= b_m p^m X(p) + b_{m-1} p^{m-1} X(p) + \ldots + b_1 p X(p) + b_0 X(p) = \quad (2)$$

Вынеся в уравнении (2) $Y(p)$ и $X(p)$ за скобки, получим:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0) Y(p) =$$
$$= (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0) X(p) = \quad (3)$$

Определим из уравнения (3) отношение изображения выходной величины к изображению входной:

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} = W(p) \quad (4)$$

Отношение изображения выходной величины элемента системы к изображению его входной величины при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией элемента системы. Передаточная функция (4) полностью определяет динамические свойства системы и может быть найдена по передаточным функциям ее отдельных звеньев.

Рассмотрим пример использования *операционного метод*а для расчета автоматического регулирования напряжения синхронного генератора и отдаваемой им в сеть реактивной мощности.

Технологическим объектом управления является синхронный генератор, предназначенный для поддержания напряжения на шинах электростанции. Источники постоянного тока, называемые возбудителями, подают на обмотки генераторов входное напряжение $x(t)$, напряжение на выходе генератора $y(t)$. Выходная величина $y(t)$ изменяется не сразу после внесения возмущения, а через промежуток времени, который называется временем запаздыванием и обозначается τ. При этом напряжение на выходе генератора есть функция от напряжения возмущения, т.е. $y(t) = f\left[x(t)\right]$.

Такую систему можно представить в виде двух последовательно соединенных звеньев: апериодического и запаздывающего.

Апериодическому звену соответствует дифференциальное уравнение:

$$T\frac{dy}{dt} + y = k \cdot x, \quad (5)$$

где T - постоянная времени, k - коэффициент передачи. Коэффициент k, постоянная времени T определяются экспериментальным образом.

Преобразуем уравнение (5) по Лапласу:

$$TpY(p) + Y(p) = k\,X(p).$$

Вынесем $Y(p)$ за скобку и разделим $Y(p)$ на $X(p)$. Получим передаточную функцию апериодического звена:

$$W_A(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Tp+1}.$$

Выходная величина в запаздывающем звене точно повторяет входную величину, но с некоторым запаздыванием по времени τ, то есть при сдвиге воздействия во времени соответствующий отклик сдвигается на столько же не меняя своей формы:

$$y = x(t-\tau). \quad (6)$$

По теореме запаздывания при любом положительном τ верно соотношение:

$$x(t-\tau) \risingdotseq X(p)e^{-p\tau}.$$

Необходимо помнить, что наличие корней характеристического уравнения с положительной действительной частью означает наличие неограниченных решений исходного уравнения, то есть неустойчивость. Сколь угодно малое запаздывание оказывает дестабилизирующее воздействие на систему, а пренебрежение им в модели может привести к неправильным выводам.

Перейдя в уравнении (6) к изображениям, получим:

$$Y(p) = X(p)e^{-p\tau}.$$

Таким образом, запаздывающее звено имеет передаточную функцию:

$$W_З(p) = e^{-p\tau}.$$

Передаточная функция системы последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев. Тогда передаточная функция объекта управления примет вид:

$$W(p) = W_A(p) \cdot W_З(p) = \frac{k}{Tp+1} \cdot e^{-p\tau} = \frac{ke^{-p\tau}}{Tp+1}.$$

Свойства звеньев, их соединений и АСР в целом определяются их характеристиками: статическими и динамическими. К динамическим характеристикам относят частотные.

Если на вход системы (звена) подавать синусоидальные колебания с постоянными амплитудой и частотой $x(t) = A_{вх} \sin \omega t$, то после затухания переходных процессов на выходе также возникают синусоидальные колебания $y(t) = A_{вых}(\sin \omega t + \phi)$, стой же частотой, но с другой амплитудой и сдвинутые по фазе относительно входных колебаний.

На комплексной плоскости входная величина $x(t) = A_{вх} \sin \omega t$ для каждого значения времени t определяется вектором $A_{вх}$, проведенным из начала координат под углом ωt. Если входную величину представить в комплексной форме, то ее действительная часть равна $A_{вх} \cos \omega t$, а мнимая $A_{вх} \sin \omega t$.

Обозначив значения комплексной входной величины для различных значений времени $\overline{x}(t)$, запишем ее в показательной форме

$$\overline{x}(t) = A_{вх} e^{i\varpi t}.$$

Аналогичным образом выходная величина в комплексной показательной форме имеет вид:

$$\overline{y}(t) = A_{вых} e^{i(\varpi t + \phi_{вых})}.$$

Если начальная фаза входной величины не равна нулю, то в общем случае имеем:

$$\overline{x}(t) = A_{вх} e^{i(\varpi t + \phi_{вх})}.$$

Отношение выходной величины системы к входной величине, выраженное в комплексной форме

$$\frac{\overline{y}(t)}{\overline{x}(t)} = \frac{A_{вых}}{A_{вх}} e^{i(\phi_{вых} - \phi_{вх})} = W(i\varpi)$$

называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) системы. Для получения АФХ достаточно в передаточной функции звена или системы $W(p)$ заменить переменную p на $i\varpi$.

Зависимость отношения амплитуд выходных и входных колебаний от их частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ):

$$W(\varpi) = \frac{A_{вых}}{A_{вх}}.$$

Амплитудно-частотная характеристика является модулем АФХ:

$$W(\varpi) = |W(i\varpi)|.$$

Зависимость разности фазы выходных и входных колебаний от частоты называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) системы:

$$\phi(\varpi) = \phi_{вых} - \phi_{вх}.$$

Фазо-частотная характеристика является аргументом АФХ системы.

Рассчитаем частотные характеристики АСР напряжения синхронного генератора.

Подставив в передаточную функцию $W(p)$ выражение $p = i\omega$, получим амплитудно-фазовую характеристику системы:

$$W(i\omega) = \frac{k e^{-i\omega\tau}}{1 + iT\omega}.$$

Представим комплексное число $z = 1 + iT\omega$ в показательной форме:

$$1 + i \cdot T\omega = \sqrt{1 + (T\omega)^2}\, e^{iarctgT\omega}.$$

Тогда АФХ примет вид:

$$W(i\omega) = \frac{k \cdot e^{-i\omega\tau}}{\sqrt{1 + (T\omega)^2} \cdot e^{iarctgT\omega}} = \frac{k}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} \cdot e^{-i(\omega\tau + arctgT\omega)}.$$

Из полученного выражения найдем амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики синхронного генератора:

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}, \quad \phi(\omega) = -(\omega\tau + arctgT\omega).$$

Список литературы

1. **Клюев А. С.** Автоматическое регулирование. М.: Энергия, 1973. 392 с.
2. **Краснов М. Л., Киселёв А. М., Макаренко Г. М.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981. 302 с.
3. **Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В.** Основы теории и элементы систем автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов. М.: Машиностроение, 1985. 539 с.