Сёмкин Сергей Викторович, Смагин Виктор Павлович

ДИПОЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОДВОДНОГО ВЗРЫВА

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/6/13.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2010. № 6 (37). С. 40-42. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/6/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 550.373

Сергей Викторович Сёмкин, Виктор Павлович Смагин
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса

ДИПОЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОДВОДНОГО ВЗРЫВА©

Работа выполнена при поддержке гранта П1073 Министерства науки и образования в рамках программы «Научные и научно-методические кадры инновационной России 2009-2013»

В морской среде могут происходить процессы, сопровождающиеся интенсивным, но сравнительно локализованным движением воды – например подводные взрывы или извержения подводных вулканов. При таких процессах, как и при любых движениях в магнитном поле проводящей жидкости, которой и является морская вода, возникают индуцированные электрические токи и создаваемое ими дополнительное магнитное поле. При подводных взрывах возникают сложные гидродинамические движения – ударные и звуковые волны, а так же масштабное движение воды [1]. Все эти движения, будучи движениями проводящей среды с проводимостью σ в геомагнитном поле $\mathbf{F}$, приводят к возникновению электрических токов, создающих магнитные поля.

Магнитное поле может быть рассчитано для заданной системы токов с помощью уравнений Максвелла. В зависимости от пространственной структуры и скорости изменения поля, можно применять те или иные приближения. Если пренебречь токами смещения, то для магнитного поля $\mathbf{B}$ получим уравнение типа диффузии.

$$\mu_0\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla^2\mathbf{B} = \mu_0\sigma \operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{F}].$$

Для безграничной среды и нулевых начальных условий решение этого уравнения имеет следующий вид [2]:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \left(\frac{\mu_0\sigma}{4\pi}\right)^{3/2}\int_0^t \frac{dt'}{(\sqrt{(t-t')})^3}\int \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4(t-t')}\right)\operatorname{rot}[\mathbf{v}(\mathbf{r}',t),\mathbf{F}]d\mathbf{r}'. \quad (1)$$

Если кроме того пренебречь самоиндукцией, то для поля $\mathbf{B}$ получим уравнение Пуассона, решение которого для подводного взрыва рассмотрено в [3; 4]. Непосредственный расчет поля из решения (1) хотя и возможен в некоторых случаях, но все же представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому, воспользовавшись локализованностью системы индуцированных токов при подводном взрыве, мы рассмотрим приближенный расчет индуцированного поля по аналогии с известным дипольным приближением в электро- и магнитостатике.

Преобразуем (1), используя тождество $\operatorname{rot}(f\mathbf{a}) = f\operatorname{rot}\mathbf{a} + [\nabla f,\mathbf{a}]$:

$$\psi\operatorname{rot}'\mathbf{j}' = -[\nabla'\psi,\mathbf{j}'] + \operatorname{rot}'(\psi\mathbf{j}') = [\nabla\psi,\mathbf{j}'] + \operatorname{rot}'(\psi\mathbf{j}') = \operatorname{rot}(\psi\mathbf{j}') - \operatorname{rot}'(\psi\mathbf{j}').$$

Здесь $\mathbf{j}' = [\mathbf{v}(\mathbf{r}',t'),\mathbf{F}]$, $\psi = \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4(t-t')}\right)$, знак «штрих» над операторами rot и ∇ означает дифференцирование по компонентам $\mathbf{r}'$, эти же операции без штриха – дифференцирование по компонентам $\mathbf{r}$. Тогда:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$

где $\mathbf{A} = \left(\frac{\mu_0\sigma}{4\pi}\right)^{3/2}\int_0^t \frac{dt'}{(\sqrt{(t-t')})^3}\int \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4(t-t')}\right)\mathbf{j}'(\mathbf{r}',t')d\mathbf{r}'$.

Построим для векторного потенциала $\mathbf{A}$ дипольное приближение, аналогичное дипольному приближению в магнитостатике. Разложим функцию ψ по степеням $\mathbf{r}'$ до первого порядка:

$$\exp\left(-\frac{\mu_0\sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4(t-t')}\right) \approx \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma r^2}{4(t-t')}\right)\left(1+\frac{\mu_0\sigma}{2(t-t')}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right).$$

Для безвихревого движения жидкости

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = \operatorname{div}[\mathbf{v},\mathbf{F}] = (\mathbf{F},\operatorname{rot}\mathbf{v}) + (\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0.$$

© Сёмкин С. В., Смагин В. П., 2010

Поэтому для произвольной функции $f(\mathbf{r})$
$f(\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{j} = \operatorname{div}(f(\mathbf{r})\mathbf{j}) - (\mathbf{j}, \nabla f(\mathbf{r})) = 0$.

Проинтегрировав это равенство по объему, преобразовав интеграл от первого слагаемого по теореме Гаусса и считая его равным нулю вследствие ограниченности области, в которой происходит движение, получим: $\int (\mathbf{j}, \nabla f) d\mathbf{r} = 0$.

Взяв $f(\mathbf{r}) = x_i$ - i-ой компоненте вектора $\mathbf{r}$, получим $\int \mathbf{j}' d\mathbf{r}' = 0$, а взяв $f(\mathbf{r}) = x_i x_j$, получим, что $\int \mathbf{j}'(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\int \mathbf{r}'(\mathbf{j}', \mathbf{r}) d\mathbf{r}'$. Используя это выражение, получим:

$$\int (\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{j}' d\mathbf{r}' = \frac{1}{2}\int ((\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{j}' - (\mathbf{j}', \mathbf{r})\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{2}\int [[\mathbf{r}', \mathbf{j}'], \mathbf{r}] d\mathbf{r}' = [\mathbf{m}(t'), \mathbf{r}],$$

где $\mathbf{m}(t') = \frac{1}{2}\int [\mathbf{r}', \mathbf{j}'] d\mathbf{r}'$ - дипольный момент. Использовав эти результаты, запишем векторный потенциал в дипольном приближении:

$$\mathbf{A}_d = \frac{(\mu_0\sigma)^{5/2}}{16\pi^{3/2}} \int_0^t \frac{[\mathbf{m}(t'), \mathbf{r}]}{(t-t')^{5/2}} \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma r^2}{4(t-t')}\right) dt'.$$

Для вычисления $\mathbf{B}_d = \operatorname{rot}\mathbf{A}_d$ воспользуемся следующим векторным тождеством:

$$\operatorname{rot}([\mathbf{m}, \mathbf{r}\psi(r)] = \mathbf{m}\operatorname{div}(\mathbf{r}\psi(r)) - (\mathbf{m}, \nabla)(\mathbf{r}\psi(r)) =$$
$$= \mathbf{m}(3\psi(r) + (\mathbf{r}, \nabla\psi(r))) - (\mathbf{m}\psi(r) + \mathbf{r}(\mathbf{m}, \nabla\psi(r))) =$$
$$= 2\mathbf{m}\psi(r) + [\nabla\psi(r), [\mathbf{m}, \mathbf{r}]].$$

Тогда

$$\mathbf{B}_d = \frac{(\mu_0\sigma)^{5/2}}{8\pi^{3/2}} \int_0^t \mathbf{m}(t') \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma r^2}{4(t-t')}\right) \frac{dt'}{(t-t')^{5/2}} +$$
$$+ \frac{(\mu_0\sigma)^{5/2}}{16\pi^{3/2}} \int_0^t \left[\nabla \exp\left(-\frac{\mu_0\sigma r^2}{4(t-t')}\right), [\mathbf{m}(t'), \mathbf{r}]\right] \frac{dt'}{(t-t')^{5/2}} \qquad (2)$$

Для центрально-симметричного поля скоростей, $\mathbf{m}(t)$ параллельно геомагнитному полю $\mathbf{F}$ и второе слагаемое в этом выражении равно нулю для точек на оси z (параллельной $\mathbf{F}$).

Расчет поля в дипольном приближении по формуле (2) возможен для любых потенциальных движений жидкости. Для расчета поля, возникающего при пульсациях газовой сферы продуктов подводного взрыва, можно воспользоваться гидродинамической моделью, описанной в нашей монографии [5]. Если гидродинамическая скорость определяется выражением $\mathbf{v} = -\nabla\phi$ где $\phi = \frac{f(t - r/c_0)}{r}$ - потенциал поля скоростей, а $f(t) = a^2(t)\dot{a}(t)$, где $a(t)$ - радиус газовой сферы, дипольный момент равен

$$m(t) = F\frac{4}{3}\pi\int_0^{ct} r'^3 \frac{\partial\phi}{\partial r'} dr' = -F\frac{4}{3}\pi c^2 \int_0^t a^3(t') dt' \text{ при } t < T \text{ и}$$

$$m(t) = -F\frac{4}{3}\pi c^2 \int_0^T a^3(t') dt' \text{ при } t > T \qquad (3)$$

Взяв $a(t) = 4a_m\left(\frac{t}{T} - \left(\frac{t}{T}\right)^2\right)$ [5], запишем поле в дипольном приближении в виде

$B_d = -\frac{A}{r}\eta_d(x, \tau, p)$, где

$A = \mu_0\sigma F\frac{(4a_m)^3}{T}$, $x = r/cT$, $p = \omega_s T$ ($\omega_s = \mu_0\sigma c^2$) и

$\eta_d(x, \tau, p) = \frac{xp^{3/2}}{840\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \lambda(y) \exp\left(-\frac{px^2}{4(\tau - y)}\right) \frac{dy}{(\tau - y)^{5/2}}$, где

$$\lambda(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 1 \\ y^4(35 - 84y + 70y^2 - 20y^3), & 0 < y < 1 \end{cases}$$

Это решение можно сопоставить с точным решением (1), найденным для этой модели [5].

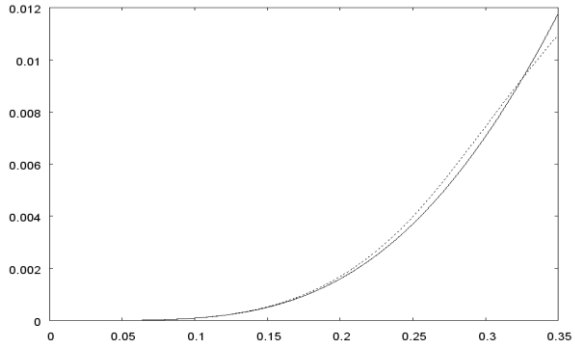

Рис. 1

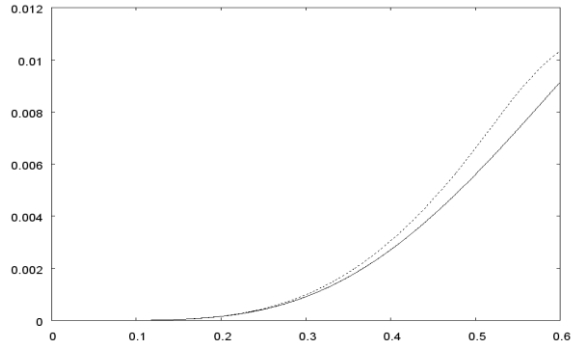

Рис. 2

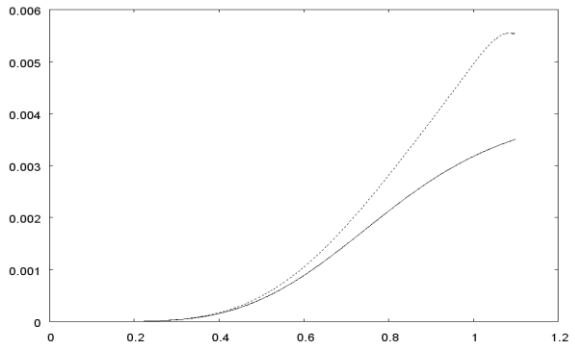

Рис. 3

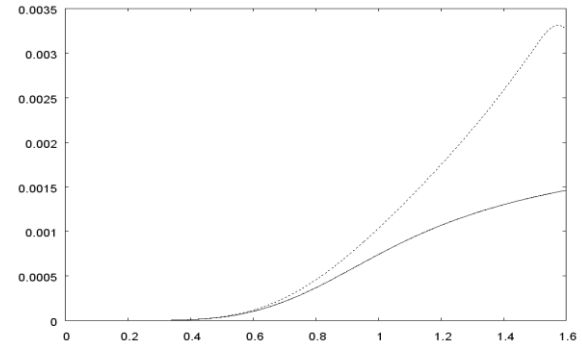

Рис. 4

На рисунках 1–4 приведены графики функций $\eta_d(x,\tau,p)$ (сплошная линия) и $\eta_3(x,\tau,p)$ (пунктирная линия) – соответствующая точному решению (1), позволяющие оценить точность дипольного приближения при разных значениях параметров. Параметр p для всех графиков равен 1,4, а параметр x принимает значения 0,25, 0,5, 1 и 1,5.

Список литературы

1. Коул Р. Подводные взрывы. М.: Издательство иностранной литературы, 1950. С. 494.
2. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с.
3. Семкин С. В., Смагин В. П. Расчет магнитного поля, возникающего при подводном взрыве в квазистатическом приближении // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2009. № 8 (16): Математика, физика, строительство, архитектура, технические науки и методика их преподавания. С. 192-197.
4. Сёмкин С. В., Смагин В. П., Савченко В. Н. Генерация возмущений магнитного поля при подводном взрыве // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. № 1. Т. 46. С. 138–141.
5. Сёмкин С. В., Смагин В. П., Савченко В. Н. Морские электромагнитные поля: монография. СПб.: Цифровой типографский центр СПбГПУ, 2010. Ч. III. Инфразвуковой океанический волновод, подводные взрывы. 132 с.

УДК 537.8

Владимир Викторович Торшин, Владимир Павлович Старовойтов
ИПУ РАН им. В. А. Трапезникова
МГТУ (МАДИ)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА «НАКАТА» В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УСТРОЙСТВАХ©

При разгоне автомобиля до определенной скорости, для экономии топлива многие водители, разъединяют трансмиссию автомобиля, чтобы продолжить дальнейшее движение автомобиля без использования двигателя. В этом случае автомобиль продолжает свое движение наподобие обычной тележки по инерции, т. е. *накатом*. Особенно хорошо применять этот режим под горку, когда трансмиссия автомобиля отключается от двигателя внутреннего сгорания и движение автомобиля происходит за счет силы инерции. Таким образом, движение автомобиля происходит с периодическими интервалами *разгона* (ускорения), движение «*накатом*», дальнейшего ускорения или *торможения*.

© Торшин В. В., Старовойтов В. П., 2010