УДК 517.938.5:531.38+519.6

*Михаил Павлович Харламов, Евгений Геннадьевич Шведов*
*Волгоградская академия государственной службы*
*Волгоградский государственный технический университет*

# ОБ АЛГОРИТМАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ КЛАССОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ©

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области (грант № 10-01-97001)

**Постановка задачи**. В связи с исследованием фазовой топологии динамических систем, интегрируемых алгебраическим разделением переменных, возникает многозначная зависимость вектора фазовых переменных $\vec{x}$ от вспомогательных переменных разделения $\vec{s}$, параметров $\vec{f}$ интегрального многообразия и набора радикалов вида $\vec{R}=\{R_{i\alpha}=\sqrt{s_i-e_\alpha(\vec{f})}\}$. Эволюция переменных $s_i$ описывается системой независимых дифференциальных уравнений

$$\frac{ds_i}{d\tau}=\sqrt{P(s_i;\vec{f})},$$

где $P(s;\vec{f})=\prod\limits_{\alpha}[s-e_\alpha(\vec{f})]$, а $\tau$ связано с временем $t$ монотонной зависимостью, которая считается известной или может быть найдена после интегрирования разделенных уравнений. К таким задачам относятся системы, сводимые к уравнениям Абеля, классические интегрируемые случаи в динамике твердого тела (случаи Эйлера, Горячева–Чаплыгина–Сретенского, Ковалевской) [2], а также частные случаи интегрируемости. В последние годы найден ряд новых разделений переменных, порождающих многозначные отображения $\vec{x}=\vec{x}(\vec{s},\vec{f})$, такие, что кратность накрытия $\vec{s}=\varphi(\vec{x},\vec{f})$ достигает $2^{13}$ [5; 6; 7]. Во всех этих случаях зависимости $\vec{x}$ от $\vec{s}$ можно свести к полиномам от радикалов $R_{i\alpha}$, коэффициенты которых однозначные функции $\vec{s}$. В дальнейшем полагаем, что векторный параметр $\vec{f}$ фиксирован, и явно его в зависимостях не указываем. При этом для простоты изложения рассматривается случай, когда $P(s)$ не имеет кратных корней. Фиксируем для каждой переменной $s_i$ ее отрезок осцилляции. При необходимости выполним рациональную замену переменных $s_i$, после которой все отрезки будут конечными. Пусть $\Pi$ – прямое произведение этих отрезков в пространстве $\{\vec{s}\}$. Задача состоит в определении топологии выбранного интегрального многообразия $J=\varphi^{-1}(\Pi)$ в пространстве исходных фазовых переменных, а именно, количества его связных компонент, поскольку каждая такая компонента сама по себе при сделанных допущениях может быть только тором размерности $\dim\vec{s}$ [1]. Точке $\vec{s}\in\operatorname{Int}\Pi$ формально соответствует $2^N$ различных точек $\vec{x}$, где $N=\dim\vec{R}$. Однако при этом вдоль любой траектории часть радикалов (назовем их радикалами 1-й группы), в количестве $n$, имеет фиксированный знак, выбранный в начальный момент времени, а другие (назовем их радикалами 2-й группы), в количестве $m=N-n$, периодически меняют знак при отражении переменной $s_i$ от границы отрезка осцилляции. Очевидно, радикалы 2-й группы не порождают удвоения количества связных компонент. Но и радикалы 1-й группы не все входят в выражения $\vec{x}$ независимо, а встречаются в некоторых мономах от компонент вектора $\vec{R}$. Пусть $\vec{Z}$ – полный набор таких мономов размерности $k$. В работе [7] предложен следующий метод описания кратности накрытия в множестве компонент связности. Сопоставим отрицательному числу число 1, а положительному – число 0. Если исходное число мнимое, сделаем то же самое с его мнимой частью. Назовем полученную функцию булевым знаком. Булев знак произведения равен сумме булевых знаков сомножителей по модулю 2. Тогда отображение $\vec{s}\mapsto\vec{x}$ порождает булеву вектор-функцию (БВФ) $C: F^n\times F^m\to F^k$, где $F=\{0,1\}$ рассматривается как поле $\mathbf{Z}_2$, а $F^n=\{\vec{v}\}$, $F^m=\{\vec{w}\}$, $F^k=\{\vec{z}\}$ – пространства булевых векторов, выражающих булевы знаки радикалов 1-й, 2-й групп и мономов-компонент вектора $\vec{Z}$. Введем отношение эквивалентности, полагая для $\vec{v}',\vec{v}''\in F^n$ $\vec{v}'\sim\vec{v}''\Leftrightarrow\exists\vec{w}',\vec{w}''\in F^m$: $C(\vec{v}',\vec{w}')=C(\vec{v}'',\vec{w}'')$. Тогда количество компонент связности многообразия $J$ равно количеству классов эквивалентности в $F^n$ по введенному отношению [Там же]. Ниже предлагаются конструктивные способы вычисления этого количества.

**Первый алгоритм (общий случай).** Если полученная БВФ $C$ есть отображение конечных множеств общего вида, то она стандартным образом задана таблицей из $2^{n+m}$ строк, содержащих вектор-аргумент $(\vec{v},\vec{w})$ и вектор-значение $\vec{z}$. Без дополнительных условий вряд ли можно предложить что-либо лучше пря-

---

мого перебора. Получаем следующий алгоритм. Составим таблицу БВФ. Назовем ее строку помеченной числом $j$, если уже установлена ее принадлежность классу эквивалентности с порядковым номером $j$. Пусть $j_0$ классов строк уже помечены. Вводим пустые массивы $\mathbf{K}, \mathbf{Z}$. Находим первую непомеченную строку. Если таковой нет, процесс окончен. Если строка найдена, то присваиваем ей метку $j_1 = j_0 + 1$, соответствующий вектор аргументов $\vec{v}$ включаем в массив $\mathbf{K}$ (новый класс с номером $j_1$), а соответствующее значение $\vec{z}$ – в массив $\mathbf{Z}$. Просматриваем строки таблицы, начиная с текущей. Если строка непомечена и у нее $\vec{v} \in \mathbf{K}$ или $\vec{z} \in \mathbf{Z}$, то помечаем ее номером $j_1$, и если одно из включений не выполнено, то пополняем соответствующий массив. При этом, если произошло пополнение хотя бы одного из массивов $\mathbf{K}$ или $\mathbf{Z}$ новыми элементами, то просмотр таблицы повторяется. Класс с номером $j_1$ сформирован. Полагаем $j_0 = j_1$ и повторяем процесс, начиная с ввода пустых массивов. По завершении алгоритма искомое число есть значение последней присвоенной метки $j_0$.

Описанный алгоритм применен к упомянутым выше классическим задачам динамики твердого тела. Полученные результаты в точности совпадают с результатами [3; 4] и дают тем самым простое алгебраическое доказательство всех утверждений этих работ относительно фазовой топологии, полученных сложными аналитическими расчетами и анализом особенностей гладких отображений.

**Второй алгоритм (линейный случай).** Если, как отмечено выше, зависимости $\vec{x}$ от радикалов $\vec{R}$ являются полиномиальными, то отображение $C: F^n \times F^m \to F^k$ будет линейным в силу мультипликативно-аддитивной двойственности булева знака. Рассмотрим общую ситуацию.

Пусть

$$C: U = V \times W \to Z \tag{1}$$

есть линейное отображение векторных пространств над произвольным полем (в частности, над полем $\mathbf{Z}_2$).

*Определение 1*. Элементы $\vec{v}', \vec{v}'' \in V$ назовем эквивалентными относительно пары $(C, W)$, если существуют $\vec{w}', \vec{w}'' \in W$, такие что $C(\vec{v}', \vec{w}') = C(\vec{v}'', \vec{w}'')$.

Обозначим $K_{(C,W)}(\vec{v})$ – класс эквивалентности вектора $\vec{v}$ по введенному отношению. И сам класс и количество классов существенно зависят от выбора $W$ в разложении $U = V \times W$. Далее фиксируем такое разложение и индекс $(C, W)$ опускаем.

*Теорема 1*. Класс эквивалентности нуля $V_0 = K(0)$ есть подпространство в $V$. Для любого $\vec{v}$ имеем $K(\vec{v}) = \vec{v} + V_0$. В частности, множество классов эквивалентности есть фактор-пространство $V / V_0$.

*Теорема 2*. Пусть $L_1: V_1 \to V$, $M_1: W_1 \to W$, $N_1: Z \to Z_1$ изоморфизмы. Тогда пространство $V / V_0$ изоморфно пространству классов эквивалентности в $V_1$ относительно пары $(C_1, W_1)$, где $C_1 = N_1 \circ C \circ (L_1 \times M_1)$.

Доказательство этих утверждений вытекает прямо из определения 1.

Обозначим $d = \dim V / V_0$. Для конечного поля из $g$ элементов количество классов эквивалентности равно $g^d$. Поэтому важно вычислить именно размерность фактор-пространства.

*Теорема 3*. Искомая размерность $d$ равна размерности фактор-пространства $C(V) / Z_0$, где $Z_0 = C(V) \cap C(W)$.

*Лемма 1*. Пусть $X, Y$ – векторные пространства, $L \subset X$ – подпространство, $A: X \to Y$ – линейный эпиморфизм и $\ker A \subset L$. Тогда фактор-пространства $X / L$ и $Y / A(L)$ изоморфны.

*Доказательство*. Пусть $x \in X$ и $[x] = x + L$ – класс эквивалентности. Сопоставим ему класс $[Ax] = Ax + A(L)$. Очевидно, если $x_1 = x + y$, $y \in L$, то $Ax_1 - Ax = Ay \in A(L)$, то есть корректно определено (линейное) отображение

$$\hat{A}: X / L \to Y / A(L).$$

Это отображение есть эпиморфизм, так как $A$ – эпиморфизм. Покажем его взаимную однозначность. Пусть $[Ax] = 0$, тогда $Ax \in A(L)$, то есть $Ax = Ay$, $y \in L$. Но это означает, что $x - y \in \ker A \subset L$. Поэтому $[x] = 0$. Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 3*. Положим $A = C|_V$, $L = V_0$. Пусть $\vec{v} \in \ker A$. Тогда $C(\vec{v}, 0) = 0 = C(0, 0)$, значит, $\vec{v} \,\square\, 0$ и $\vec{v} \in L$. Следовательно, $\ker A \subset L$.

Найдем $A(L)$. Пусть $\vec{z} \in A(L)$, тогда $\vec{z} = A\vec{v} = C(\vec{v}, 0)$, $\vec{v} \in L$. По определению существует $\vec{w} \in W$, такое, что $C(\vec{v}, \vec{w}) = 0$. Тогда $\vec{z} = C(0, -\vec{w}) \in C(W)$. Поэтому $A(L) \subset C(V) \cap C(W)$. Обратно, пусть $\vec{z} \in C(V) \cap C(W)$. Тогда для некоторых $\vec{v} \in V, \vec{w} \in W$ будем иметь $\vec{z} = C(\vec{v}, 0) = A\vec{v}$ и $\vec{z} = C(0, -\vec{w})$. Отсюда $C(\vec{v}, \vec{w}) = 0$, значит, $\vec{v} \in L$ и $\vec{z} \in A(L)$. Следовательно, $A(L) = C(V) \cap C(V)$. Доказательство завершается применением леммы 1.

Запишем матрицу отображения (1) в некоторых координатах $(u_1,\ldots,u_{n+m})=(v_1,\ldots,v_n,w_1,\ldots,w_m)$ и $(z_1,\ldots,z_k)$, полагая $z_i=c_{ij}u_j$ (знак суммирования, как обычно, опускаем). Матрицу обозначаем той же буквой, что и само отображение. Координаты $v_i, w_j$ называем аргументами 1-й и 2-й групп соответственно.

*Определение 2.* Назовем эквивалентными такие линейные преобразования матрицы $C$ (то есть умножения на матрицы слева и справа), которые не изменяют количества классов эквивалентности в пространстве аргументов 1-й группы.

*Определение 3.* Назовем элементарными преобразованиями матрицы отображения (1) следующие: перестановка строк и прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любой элемент поля; перестановка столбцов и прибавление к одному столбцу другого, умноженного на любой элемент поля, в пределах одной группы.

*Лемма 2.* Элементарные преобразования матрицы $C$ являются эквивалентными.

Утверждение следует из теоремы 2, так как указанные преобразования можно рассматривать как изоморфизмы пространств $Z,V,W$.

Отметим, что перечисленные преобразования не изменяют также и количество элементов в самих классах (для бесконечных полей – размерности классов эквивалентности, как аффинных подпространств в $V$).

*Теорема 4.* Запишем матрицу отображения $C$ как $C=\left(A \mid B\right)$, где $A,B$ – матрицы отображений-ограничений на пространства $V,W$ координат 1-й и 2-й групп соответственно. Тогда элементарными преобразованиями $C$ приводится к виду

$$C=\left(\begin{array}{cc|c|c|c|c} E_{p-q} & 0 & \multirow{2}{*}{0} & 0 & \multirow{2}{*}{0} & \multirow{2}{*}{0} \\ \hline 0 & E_q & & E_q & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 & 0 & E_r & 0 \\ \hline \multicolumn{6}{c}{0} \end{array}\right), \tag{2}$$

где $E_j$ – единичная $j\times j$-матрица, $p=\operatorname{rk}A$, $q+r=\operatorname{rk}B$, $q=\dim(C(V)\cap C(W))$. При этом размерность пространства классов эквивалентности в $V$ относительно пары $(C,W)$ равна $p-q$, а для отображений над полем $\mathbf{Z}_2$ количество классов эквивалентности равно $2^{p-q}$.

*Доказательство*. Возможность приведения матрицы к виду (2) достигается подходящим выбором базисов последовательно в пространствах $C(V)\cap C(W)$ ($q$ векторов), в $C(V)$ ($p-q$ векторов дополнительно к уже выбранным), в $C(W)$ ($r$ векторов дополнительно к уже выбранным), их прообразов в $V,W$, дополненных подходящими базисами в $\ker C$ и в $\operatorname{coker} C$. Утверждения о классах эквивалентности следуют из теоремы 3. Теорема доказана.

Очевидно, что алгоритм вычисления числа $d=p-q$ сводится теперь к варианту метода Гаусса, который мы имеем право применять не только к строкам (как при решении СЛУ), но и к столбцам с той лишь оговоркой, что столбцы, участвующие в вычислениях должны принадлежать к одной группе.

На основе полученных выше утверждений составлена компьютерная программа вычисления количества связных компонент интегральных многообразий интегрируемых гамильтоновых систем, допускающих алгебраическое разделение переменных. Программа применена к трем новым аналитическим решениям задачи о движении тяжелого магнита в постоянных магнитном и гравитационном полях [5; 6; 7].

*Список литературы*

1. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
2. **Березкин Е. Н.** Лекции по теоретической механике. М.: Издательство МГУ, 1968. Т. 2. 315 с.
3. **Харламов М. П.** Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Издательство ЛГУ, 1988. 200 с.
4. **Харламов М. П.** Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела // Доклады АН СССР. 1983. № 6. Т. 273.
5. **Харламов М. П.** Особые периодические решения обобщенного случая Делоне // Механика твердого тела. 2006. Вып. 36.
6. **Харламов М. П., Савушкин А. Ю.** Явное интегрирование одной задачи о движении обобщенного волчка Ковалевской // Доклады РАН. 2005. № 3. Т. 401.
7. **Kharlamov M. P.** Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class // Regular and chaotic dynamics. 2009. № 6. V. 14.