Филиппенко Виктор Игнатьевич

СИММЕТРИЧЕСКИЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР И ЕГО СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/8/22.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2010. № 8 (39). С. 67-70. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/8/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

Использование трех механизмов – электростатический, пьезоэлектрический и тепловой, позволяет повысить энергоемкость устройств микросистемной техники и расширить функциональные возможности преобразователей, которые способны контролировать несколько переменных процесса или объекта.

Таким образом, для современных разработчиков устройств микросистемной техники актуальными являются следующие задачи:

1. Уменьшение массо-габаритных показателей устройств микросистемной техники.

2. Расширение функциональных возможностей преобразователей путем использования их сенсорных и актюаторных свойств, объединения нескольких механизмов преобразования энергии в одном устройстве.

3. Разработка программных продуктов, позволяющих решать связанные физические задачи [6] для моделирования и проектирования ЕЭМП.

4. Объединение усилий ученых из разных отраслей науки и менеджеров, способных довести продукт до конечного потребителя.

Список литературы

1. Головин Ю. И. Введение в нанотехнику. М.: Машиностроение, 2007. 496 с.
2. Гридчин В. А. Драгунов В. П. Физика микросистем: учеб. пособие: в 2 ч. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. Ч. 1. 416 с.
3. Лопота В. А., Юревич Е. И. МЕХАТРОНИКА – основа интеллектуальной техники будущего [Электронный ресурс] // Микросистемная техника. 2003. № 1. URL: http://www.rtc.ru/publication/mehatron.shtml (дата обращения: 16.07.2010).
4. Ляпунов Д. Ю. Электромеханизм: пат. на полезную модель 95323, Российская Федерация, МПК B81 B3/00 / патентообладатель: ГОУ ВПО «Томский политехнический университет». № 2010108272/22. Заявл. 05.03.2010. Опубл. 27.06.2010. Бюл. № 18. 2 с.
5. Нурулин Ю. Р., Пятышев Е. Н. Микротехнологии и микроэлектромеханические системы – перспективное научно-инновационное направление [Электронный ресурс]. URL: http://www.mems.ru/pdf/Kompetenzia5_6_2006.pdf (дата обращения: 01.04.2008).
6. ELCUT: программа моделирования электромагнитных, тепловых и механических задач [Электронный ресурс] // Сервер поддержки программы Elcut. URL: http://elcut.ru/ (дата обращения: 16.07.2010).
7. Korvink, Jan G. MEMS: a practical guide to design, analisys and applications. New York: Springer, 2005. 965 p.
8. Stephen D. Senturia. Microsystem Design. New York – Boston – Dordrecht – London – Moscow, 2002.

УДК 517.984.5

Виктор Игнатьевич Филиппенко
Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

СИММЕТРИЧЕСКИЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР И ЕГО СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ©

В настоящей работе рассматривается некоторое обобщение линейного формально самосопряженного дифференциального оператора. Построены его обобщенная резольвента и обобщенные спектральные функции. Найдено спектральное разложение минимального квазидифференциального оператора. Полученные теоремы позволяют исследовать спектр, в частности, его кратность самосопряженного расширения минимального оператора.

Однопараметрическое семейство $E_t\left(-\infty < t < +\infty\right)$ ограниченных самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H называется спектральной функцией симметрического оператора A, если для любого $f \in H$ [1]:

1) $\left(E_t f, f\right)$ - неубывающая функция параметра t;

2) $E_{t-0} = E_t$, то есть E_t - непрерывная слева функция от параметра t;

3) $E_t f \to 0$ при $t \to -\infty$, $E_t f \to f$ при $t \to +\infty$;

4) $Af = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t dE_t f, \left\|Af\right\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 d\left(E_t f, f\right)$ при любом f, принадлежащем области определения $D(A)$ симметрического оператора A.

1. Пусть $F = \left(f_{ij}\right)$ - матрица-функция размерности $\left(n \times n\right)$, элементами которой служат комплекснозначные функции f_{ij} $\left(i, j = 1, 2, ...n\right)$, определенные на интервале $I = (a; b)$, $\left(-\infty \le a < b < +\infty\right)$ и удовлетворяющие следующим условиям:

(1) $f_{ij} = 0$ в интервале $I = (a, b)$ для индексов, удовлетворяющих неравенствам $2 \le i + 1 < j \le n$;

© Филиппенко В. И., 2010

(2) f_{ij} - локально суммируемы, т.е. $f_{ij} \in L_{loc}(I)$ для $1 \le i, j \le n$;

(3) $f_{i,i+1} \ne 0$ в промежутке I для индексов $1 \le i \le n-1$.

Определим квазипроизводные $y^{[k]}$, следуя [Там же]:

$$y^{[0]} = y,\ y^{[i]} = f_{i,i+1}^{-1}\left[\left(y^{[i-1]}\right)' - \sum_{j=1}^{i} f_{ij} y^{[j-1]}\right],\ i = 1,...,n-1,\ y^{[n]} = \left(y^{[n-1]}\right)' - \sum_{j=1}^{n} f_{nj} y^{[j-1]}.$$

Можно считать, что скалярное квазидифференциальное выражение $l_n[y] = i^n y^{[n]}$, где i - мнимая единица, порождается матрицей F [5]. Операция l_n порождает минимальный замкнутый симметрический оператор L, заданный в гильбертовом пространстве $L^2_w(I)$. Симметрический L оператор, имеющий плотную область определения, рассматривался в работе автора [2].

Предположим, что рассматриваемые функции y и их квазипроизводные до $(n-1)$ - го порядка включительно абсолютно непрерывны на любом $[\ ,\ ] \subset I$.

Поскольку в дальнейшем будем рассматривать только симметрические квазидифференциальные выражения, то предположим, что матрица F, кроме требований (1), (2) и (3), удовлетворяет также условию симметричности $F = -J^{-1}F^*J$, где F^* - матрица, сопряженная к матрице F, $J = \left((-1)^s \Delta_{s,n+1-j}\right)$, Δ_{sk} - символ Кронекера. Если натуральное число n - четно, то J - косоэрмитова матрица. Если натуральное n - нечетно, то $iJ, -iJ$ - косоэрмитовы матрицы.

2. Для любых функций y и z, к которым применима операция l_n, имеет место обобщенная формула Лагранжа

$$l_n[y]\overline{z} + (-1)^{n+1} y\,\overline{l_n[z]} = \{y, z\}', \qquad (1)$$

где $\{y,z\} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n+1-j} y^{[j]}\,\overline{z^{[n-j-1]}}$. Интегрируя почленно левую и правую части формулы Лагранжа (1), получим следующую формулу Грина:

$$\int l_n[y]\overline{z}\,dx + (-1)^{n+1}\int y\,\overline{l_n[z]}\,dx = \{y,z\}\Big|_{x=}^{x=},\quad ,\quad \in I,$$

где $\{y,z\}\big| = \{y,z\}(\ ) - \{y,z\}(\ )$. Заметим, что $\{y,z\} = (J\tilde{y}, \tilde{z})$, где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в n - мерном евклидовом пространстве, $\tilde{y}$ - вектор-столбец, составленный из квазипроизводных $y^{[0]}, y^{[1]}, ..., y^{[n-1]}$, а $\tilde{z}$ - вектор-столбец, составленный из квазипроизводных $z^{[0]}, z^{[1]}, ..., z^{[n-1]}$.

С помощью матрицы $\tilde{J} = J$, если n четное, и $\tilde{J} = \pm iJ$, если n нечетное, тождество Лагранжа можно переписать в виде $l_n[y]\overline{z} - y\,\overline{l_n[z]} = \left(\tilde{z}^*\tilde{J}\tilde{y}\right)'$.

Теорема 1. Пусть $n \times n$ - матрица-функция F - удовлетворяет условиям (1) – (3) и $l[y] = i^n y^{[n]}$. Если измеримые функции w, $f \in L_{loc}(I)$, где w - положительная функция на I, то для любого , любого $t_0 \in I$ и любых c_i, $i = 0,1,...n-1$, существует единственное решение y, заданное на промежутке I, задачи Коши: $l[y] = \ wy + f$, $y^{[i]}(t_0) = c_i$, $i = 0,1,...,n-1$.

3. Построим обобщенную резольвенту R оператора L. Для этого найдем решение квазидифференциального уравнения $w^{-1}l_n[y] - \ y = f$, удовлетворяющее краевым условиям, определяющим квазисамосопряженное расширение этого оператора. В результате получим R в виде интегрального оператора, ядро которого можно представить: а) через фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, б) сопряженную к ней фундаментальную систему решений и в) некоторую матрицу-функцию $M(\ )$, называемую характеристической матрицей-функцией, соответствующей обобщенной резольвенты R оператора L:

$$R\ f = \int_a^b y\ (x;\ )\left(M(\ ) + 1/2\,sign(s-x)\tilde{J}\right)\tilde{y}(s;\ )\,f(s)\,w(s)\,ds,\ \left(x, s \in (a,b), \mathrm{Im}\ \cdot \mathrm{Im}\ _0 > 0\right).$$

Здесь условие $\mathrm{Im}\ \cdot \mathrm{Im}\ _0 > 0$ позволяет фиксировать полуплоскость (верхнюю или нижнюю), содержащую точку $_0$.

Как известно, каждой спектральной функции $E_t(-\infty < t < +\infty)$ оператора L отвечает некоторая обобщенная резольвента R , определенная формулой $R = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_t / (t -)$ $(\mathrm{Im} \neq 0)$, где E_t - обобщенная спектральная функция оператора L. Введем обозначение $E_{,} = 1/2 \cdot (E + E_{+0} - E - E_{+0})$ $(-\infty < , < +\infty)$.

При помощи формулы обращения Стилтьеса спектральная функция E_t однозначно восстанавливается по известной обобщенной резольвенте R ; для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L^2_w(a,b)$ и любых вещественных и имеет место равенство:

$$(E_{,} f, g) = 1/(2 i) \lim_{\to +0} \int ([R_{+i} - R_{-i}] f, g) d \qquad (2)$$

Равенство (2) позволяет построить формулу всех обобщенных спектральных функций E_t оператора L.

Пусть R - какая-либо обобщенная резольвента оператора L и $M( )$ - ее характеристическая матрица. Определим матрицу $T( )$ формулой

$$T( ) = 1/ \lim_{\to +0} \int_0 \mathrm{Im} M(+ i) d .$$

Эта формула имеет смысл при любом вещественном и $T( )$ является неубывающей матричной функцией. Матрицу $T( )$ называют спектральной матрицей-функцией распределения симметрического оператора L, соответствующей обобщенной резольвенте R .

Пусть $L^2_T(-\infty, +\infty)$ - гильбертово пространство вектор-функций

$$( ) = (_1( ), _2( ), ..., _n( )) \ (-\infty < < +\infty),$$

которые будем рассматривать как одностолбцевые матричные функции;

скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L^2_T(-\infty, +\infty)$ определяется формулой $(,) = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^*( ) dT( ) ( )$. Используя метод направляющих функционалов М. Г. Крейна, получим следующую теорему.

Теорема 2. Для любой функции $f(x)$ из пространства $L_w{}^2(a,b)$ имеет место равенство

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} {}^*(f,) dT( ) (f;), \qquad (3)$$

где

$$(f;) = \int_a^b f(s) \tilde{y}(s;) w(s) ds ; \qquad (4)$$

при этом интеграл в (4) сходится в смысле метрики пространства $L^2_T(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Предположим сначала, что функция $f(x) \in L^2_w(a,b)$ обращается в нуль вне какого-либо конечного отрезка $[a_1, b_1] \subset (a,b)$. При любом невещественном положим $y(f; x;) = R f$. Пусть и - произвольные невещественные числа. Введем в рассмотрение функцию

$$(x,) = \frac{1}{2 i} \int [y(f; x; + i) - y(f; x; - i)] d \quad (x \in (a,b); > 0).$$

При любом $(x;) \in L^2_w(a,b)$ и, в силу формулы обращения Стилтьеса (2), при $\to +0$

$$(x;) \xrightarrow{сл} E_{,} f . \qquad (5)$$

С другой стороны

$$(x;) = \frac{1}{2 i} \int [\tilde{y}'(x;) M( ) (f;) - \tilde{y}'(x; ^-) M^*( ) (f; ^-)] d + \\ + \frac{1}{2} \int d \int_a^b \mathrm{sgn}(s - x) f(s) \mathrm{Im}[\tilde{y}'(x;) J \tilde{y}(s;)] w(s) (= + i), \qquad (6)$$

где $(f;)$ определяется согласно (4). Для любого фиксированного x $(x \in (a,b))$ второй интеграл в правой части равенства (6) стремится к нулю при $\to +0$.

Поэтому, переходя в равенстве (6) к пределу при $\to +0$, при любом фиксированном x получаем

$$\lim_{\to +0} (x;) = \int \tilde{y}'(x;) dT( ) (f;) (x \in (a,b)). \qquad (7)$$

Из (5) и (7) получаем равенство (3). Теорема доказана.

Теорема 3. Совокупность всех спектральных функций $E_t\,(-\infty < t < +\infty)$ оператора L определяется формулой $E_{\ ,}\ f = \int\ \tilde{y}\ (x;\ )dT(\ )\ (f;\ )\ \left(f \in L_w^2(a,b)\right)$, где $T(\ )\ (-\infty <\ \ < +\infty)$ - спектральная функция распределения оператора L, соответствующая его произвольной обобщенной резольвенте R.

Очевидным следствием теоремы 3 является следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $T(\ )\ (-\infty <\ \ < +\infty)$ - спектральная матрица-функция распределения оператора L, соответствующая его обобщенной резольвенте R, элементы матрицы-столбца $(f,\ )$ представляют собой скалярные произведения функции f и элементов некоторой фундаментальной системы решений однородного дифференциального уравнения $l[y] =\ wy$. Тогда для любой функции $f(x) \in L_w^2(a,b)$ имеет место разложение

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y}\ (x;\ )dT(\ )\ (f;\ ).$$

При этом интеграл в правой части этого равенства сходится в смысле метрики пространства $L_w^2(a,b)$.

Замечание 1. Формулы (3) и (4) осуществляют взаимно обратные изометрические отображения пространства $L_w^2(a,b)$ на пространство $L_T^2(-\infty,+\infty)$.

Теорема 5. При любых вещественных и оператор $E_{\ ,}$ является интегральным оператором: $E_{\ ,}\ f = \int_a^b K(x,s;\ ,\ )f(s)w(s)ds\ \left(f(x) \in L_w^2(a,b)\right)$, ядро которого определяется по формуле $K(x,s;\ ,\ ) = \int_{\ }^{2}\ \tilde{y}\ (x;\ )dT(\ )\tilde{y}(s;\ )\ \left(x,s \in (a,b)\right)$ и при любом x удовлетворяет условию $\int \left|K(x,s;\ ,\ )\right| w(s)ds < \infty$.

Замечание 2. Следуя работам [2-4], в рассматриваемой ситуации можно исследовать кратность спектра самосопряженного расширения минимального квазидифференциального оператора L, а также ранг его спектральной матрицы-функции распределения.

Замечание 3. Асимптотические методы теории дифференциальных уравнений позволяют исследовать спектр оператора L в терминах коэффициентов дифференциальной операции l_n.

Список литературы

1. **Ахиезер Н. И., Глазман И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Издательство «Наука», 1966. 543 с.
2. **Филиппенко В. И.** Линейные квазидифференциальные операторы в гильбертовом пространстве // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Издательство «Наука», 2006. С. 293–344.
3. **Филиппенко В. И.** О кратности непрерывного спектра самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Волжский мат. сб. Серия «Функциональный анализ и теория функций». Ульяновск, 1972. Вып. 13. С. 120–133.
4. **Филиппенко В. И.** О кратности спектра самосопряженного дифференциального оператора первого порядка // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 6. С. 1135–1138.
5. **Everitt W. N., Zettl A.** Generalized symmetric ordinary differential expressions I: the general theory // Nieuw archief voor wisrunde. 1979. V. 27. № 3. P. 363–397.

УДК 62-52

Александр Иванович Шимаров
Самарский государственный технический университет

СВЕТОЛУЧЕВОЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ©

В технической литературе описаны различные способы применения оптических лучей для определения углового положения объектов. Они используются при сооружении тоннелей, каналов, железных и автомобильных дорог, аэродромов и других сооружений, профиль которых должен быть ограничен плоскостью с заданным уклоном [1; 3; 4]. Эти способы требуют больших затрат времени на геодезическую подготовку профиля сооружения.

© Шимаров А. И., 2010