***H/D*=7**						**Gr**				
	Re	1.0E+04	1.0E+05	1.0E+06	1.0E+07	1.0E+08	1.0E+09	1.0E+10	1.0E+11	1.0E+12
	2.5E+03	0.2/0.2	0.7/0.7	2.2/2.3	6.5/7.9	17.7/36.5	40.9/-			
	1.0E+04	0.1/0.1	0.2/0.2	0.7/0.7	2.0/2.1	6.1/7.1	17/28.9	40.7/-		
	1.0E+05	0.01/0.01	0.02/0.02	0.1/0.1	0.2/0.2	0.7/0.8	2.3/2.4	7.0/8.2	19.5/32.7	46.7/-
***H/D*=10**						**Gr**				
	Re	1.0E+04	1.0E+05	1.0E+06	1.0E+07	1.0E+08	1.0E+09	1.0E+10	1.0E+11	1.0E+12
	2.5E+03	0.2/0.2	0.7/0.7	2.1/2.2	6.3/7.6	17.2/34.4	39.9/33.2			
	1.0E+04	0.1/0.1	0.2/0.2	0.6/0.6	2.0/2.1	5.9/6.9	16.6/27.6	39.9/-		
	1.0E+05	0.01/0.01	0.02/0.02	0.1/0.1	0.2/0.2	0.7/0.7	2.3/2.4	6.8/7.9	19.1/31.4	45.8/-

Список литературы

1. **Варава А. Н., Дедов А. В., Комов А. Т., Ягов В. В.** Исследование гидравлического сопротивления и теплообмена в однофазном закрученном потоке при одностороннем нагреве // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44. № 5. С. 699-708.
2. **Варава А. Н., Дедов А. Н., Захаров Е. М., Комов А. Т., Малаховский С. А., Ягов В. В.** Экспериментальное исследование потерь давления и теплообмена при вынужденной конвекции в закрученном потоке при одностороннем нагреве // Труды VI Минского международного форума по тепломассообмену. Минск, 2008. Секция № 1. Конвективный тепломассообмен. Доклад № 1-64. С. 1-18.
3. **Вопросы механики вращающихся потоков и интенсификация теплообмена в ЯУЭ** / Ф. Т. Каменьщиков, В. А. Решетов, А. Н. Рябов и др. М.: Энергоатомиздат, 1984. 176 с.
4. **Кутателадзе С. С.** Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.
5. **Лобанов И. Е.** Математическое моделирование интенсифицированного теплообмена при турбулентном течении в каналах: дисс. … д.т.н. М., 2005. 632 с.
6. **Лобанов И. Е., Дедов А. В.** Теория и эксперимент интенсификации теплообмена для закрученного потока внутри трубы // Труды МАИ. 2010. Вып. № 37. Ст. 8. С. 1-22.
7. **Лобанов И. Е., Доценко А. И.** Математическое моделирование предельного теплообмена для турбулизированного потока в каналах. М.: МИКХиС, 2008. 194 с.
8. **Мигай В. К.** Моделирование теплообменного энергетического оборудования. Л.: Энергоатомиздат - Ленинградское отделение, 1987. 263 с.
9. **Смитберг Э., Лэндис Ф.** Трение и характеристики теплообмена при вынужденной конвекции в трубах с завихрителями из скрученной ленты // Труды американского общества инженеров-механиков (русский перевод). Серия С. Теплопередача. М.: Мир, 1964. Т. 86. № 1. С. 52-65.
10. **Щукин В. К.** Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. М.: Машиностроение, 1980. 240 с.
11. **Щукин В. К., Халатов А. А.** Теплообмен, массообмен и гидродинамика закрученных потоков в осесимметричных каналах. М.: Машиностроение, 1982. 200 с.
12. **Эффективные поверхности теплообмена** / Э. К. Калинин, Г. А. Дрейцер, И. З. Копп и др. М.: Энергоатомиздат, 1998. 408 с.
13. **Zimparov V., Petkov V.** Compound heat transfer augmentation by a combination of spirally corrugated tubes with a twisted tape // Proc. compact heat exchangers: a festschrift on the 60-th birthday of Ramesh K. Shah: proceedings of Compact heat exchangers the international symposium in Grenoble, 24 August 2002. Grenoble, 2002. P. 477-482.

УДК 517.984.5

Виктор Игнатьевич Филиппенко
Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ФОРМАЛЬНО САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ©

Понятие характеристической функции линейного оператора в гильбертовом пространстве было впервые введено М. С. Лившицем для изометрических и симметрических операторов с индексом дефекта (1.1) и для их квазиунитарных и, соответственно, квазисамосопряженных расширений. После этого в ряде работ понятие характеристической функции было по-разному распространено на другие классы линейных операторов, удовлетворяющих тем или иным условиям.

А. В. Штраусом [1] дано определение и устанавливаются некоторые свойства характеристической функции любого плотно заданного замкнутого линейного оператора с непустым множеством регулярных точек, действующего в обычном гильбертовом пространстве.

В настоящей работе исследуются характеристические функции неплотно заданного симметрического оператора, а также некоторого конкретного дифференциального оператора.

1. Назовем характеристической функцией неплотно заданного симметрического оператора A характеристическую функцию оператора $A_{\bar{\Lambda}_0}$ (Λ_0 фиксировано в верхней комплексной полуплоскости), заданного на множестве $D\left(A_{\bar{\Lambda}_0}\right)=\left\{g: g=f+g, f\in D(A), \Phi\in N_{\Lambda_0}\right\}$ формулой $A_{\bar{\Lambda}_0}g=Af+\bar{\Lambda}_0\Phi$. Здесь и далее N_{Λ} - дефектное подпространство оператора $A: H=N_{\Lambda}\oplus(A-\Lambda E)D(A)$. К оператору $A_{\bar{\Lambda}_0}$ определение характеристической функции в терминах граничных пространств и граничных операторов можно применить, так как $\overline{D\left(A_{\bar{\Lambda}_0}\right)}=H$ и $A^*_{\bar{\Lambda}_0}=A_{\Lambda_0}$. Для оператора $A_{\bar{\Lambda}_0}$ - множество точек регулярного типа есть $\Pi^+\cup\Delta$, для оператора $A^*_{\bar{\Lambda}_0}$ - множество $\Pi^-\cup\Delta$, Δ - некоторое множество вещественных точек регулярного типа оператора A, $\Pi^+=\{\Lambda: \operatorname{Im}\Lambda>0\}$, $\Pi^-=\{\Lambda: \operatorname{Im}\Lambda<0\}$.

Предполагая, что $g=f+\Phi$, $f\in D(A)$, $\Phi\in N_{\Lambda_0}$ для оператора A_{Λ_0} имеем $[\Gamma g,\Gamma g]=\dfrac{\bar{\Lambda}_0-\Lambda_0}{i}\|\Phi\|^2$.

Отсюда следует, что граничным пространством L оператора $A_{\bar{\Lambda}_0}$ является N_{Λ_0} с обычной метрикой, а граничный оператор можно задать равенством $\Gamma g=\sqrt{\dfrac{\bar{\Lambda}_0-\Lambda_0}{i}}\Phi$. Пусть P_{Λ_0} - оператор ортогонального проектирования на дефектное подпространство N_{Λ_0}. Тогда

$$P_{\Lambda_0}\left(A_{\bar{\Lambda}_0}-\Lambda_0E\right)(f+\Phi)=P_{\Lambda_0}\left((A-\Lambda_0E)f+\left(\bar{\Lambda}_0-\Lambda_0\right)\Phi\right)=\left(\bar{\Lambda}_0-\Lambda_0\right)\Phi \tag{1}$$

Итак, окончательно

$$\Gamma g=\frac{1}{\sqrt{i\left(\bar{\Lambda}_0-\Lambda_0\right)}}P_{\Lambda_0}\left(A_{\bar{\Lambda}_0}-\Lambda_0E\right)g \tag{2}$$

Аналогично, $N_{\bar{\Lambda}_0}$ - граничное пространство L' оператора $\left(-A^*_{\bar{\Lambda}_0}=-A_{\Lambda_0}\right)$ для любых $f\in D(A)$, $\in N_{\bar{\Lambda}_0}$ $P_{\bar{\Lambda}_0}\left(A_{\Lambda_0}-\bar{\Lambda}_0E\right)(f+\ )=\left(\Lambda_0-\bar{\Lambda}_0\right)$ и граничный оператор Γ' при любом $h=f+$ задается формулой

$$\Gamma'h=-\frac{1}{\sqrt{i\left(\bar{\Lambda}_0-\Lambda_0\right)}}P_{\bar{\Lambda}_0}\left(A_{\Lambda_0}-\bar{\Lambda}_0E\right)h \tag{3}$$

Тогда в силу (1), (2) и (3) характеристическая функция $X(\Lambda)$ оператора $A_{\bar{\Lambda}_0}$, а, следовательно, и оператора A задается формулой

$$X(\Lambda)P_{\Lambda_0}\left(A_{\bar{\Lambda}_0}-\Lambda_0E\right)g=-P_{\bar{\Lambda}_0}\left(A_{\Lambda_0}-\bar{\Lambda}_0E\right)\left(A_{\Lambda_0}-\Lambda E\right)^{-1}\left(A_{\bar{\Lambda}_0}-\Lambda E\right)g \tag{4}$$

где $\operatorname{Im}\Lambda_0>0$, $\Lambda\in\Pi^-\cup\Delta$, $g\in D\left(A_{\bar{\Lambda}_0}\right)$.

Учитывая, что $g=f+\Phi$, $f\in D(A)$, $\Phi\in N_{\Lambda_0}$ равенство (1) и равенство

$$-P_{\bar{\Lambda}_0}\left(A_{\Lambda_0}-\bar{\Lambda}_0E\right)\left(A_{\Lambda_0}-\Lambda E\right)^{-1}\left(A_{\bar{\Lambda}_0}-\Lambda E\right)f=0,$$

получим формулу (4) в виде $X(\Lambda)\Phi=\dfrac{\Lambda-\bar{\Lambda}_0}{\bar{\Lambda}_0-\Lambda_0}P_{\bar{\Lambda}_0}\left(A_{\Lambda_0}-\bar{\Lambda}_0E\right)\left(A_{\Lambda_0}-\Lambda E\right)^{-1}\Phi$, где $\operatorname{Im}\Lambda_0>0$, $\Lambda\in\Pi^-\cup\Delta$, $\Phi\in N_{\Lambda_0}$.

Поскольку в формуле (4)

$$\left(A_{\Lambda_0}-\Lambda E\right)^{-1}\left(A_{\bar{\Lambda}_0}-\Lambda E\right)g=g_1\in D\left(A_{\Lambda_0}\right) \tag{5}$$

то $g_1=f_1+$, где $f_1\in D(A)$, $\in N_{\bar{\Lambda}_0}$. Подставив выражения для элементов g и g_1 в (4), получим, что

$$X(\Lambda)\Phi= \tag{6}$$

Поскольку $g=f+\Phi$, $f\in D(A)$, $\Phi\in N_{\Lambda_0}$, то (5) можно записать в виде

$$\left(A_{\bar{\Lambda}_0}-\Lambda E\right)(f+\Phi)=\left(A_{\Lambda_0}-\Lambda E\right)(f_1+\ ).$$

Обозначив $f - f_1$ через f_2, запишем это равенство так: $\left(\Lambda - \overline{\Lambda}_0\right) \Phi - \left(A - \Lambda_0 \right) = \left(A - \overline{\Lambda}_0 E\right) f_2$. Положив $h = \Phi -$, получим

$$A_{\overline{\Lambda}_0}^{*} h = \Lambda h \tag{7}$$

Здесь $h \in N_{\overline{\Lambda}}$, так как при любом $f \in D(A)$ $0 = \left(A_{\overline{\Lambda}_0}^{*} h - \Lambda h, f\right) = \left(h, \left(A - \overline{\Lambda} E\right) f\right)$.

Вычитая из обеих частей равенства (7) $\Lambda_0 h$ и спроектировав полученные векторы на пространство N_{Λ_0}, получим $\Phi = \dfrac{\Lambda - \Lambda_0}{\overline{\Lambda}_0 - \Lambda_0} P_{\Lambda_0} h$.

Аналогично, вычитая $\overline{\Lambda}_0 h$ и спроектировав на $N_{\overline{\Lambda}_0}$, имеем $= \dfrac{\Lambda - \overline{\Lambda}_0}{\overline{\Lambda}_0 - \Lambda_0} P_{\overline{\Lambda}_0} h$.

Подставив найденные значения Φ и в (6), имеем $X(\Lambda) P_{\Lambda_0} h = \dfrac{\Lambda - \overline{\Lambda}_0}{\Lambda - \Lambda_0} P_{\overline{\Lambda}_0} h$,

где $h \in N_{\overline{\Lambda}}$ при $\operatorname{Im} \Lambda_0 > 0,\ \Lambda \in \Pi^- \cup \Delta$.

2. Пусть A - дифференциальный оператор в пространстве $L^2(a,b)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l[y] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_{n-k}(x) \frac{d^k y}{dx^k} \right) \tag{8}$$

и краевыми условиями

$$y\Big|_{x=a} = 0,\ y^{[1]}\Big|_{x=a} = 0, \ldots, y^{[2n-1]}\Big|_{x=a} = 0 \tag{9}$$

Отрезок $[a,b]$ предполагается конечным, а функции $p_0^{-1}(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ - вещественными и суммируемыми на этом промежутке. Область определения $D(A)$ оператора A состоит из функций $y(x)$ $(a \le x \le b)$, для которых квазипроизводные $y^{[s]}$ абсолютно непрерывны на отрезке $[a,b]$ до $(2n-1)$ -го порядка включительно, а $l[y] \in L^2(a,b)$ и, кроме того, выполняется условие (9). Для элемента $y(x) \in D(A)$ $Ay = l[y]$. Если $f(x) \in D(a)$, то

$$\frac{1}{i}\left((Af, f) - (f, Af)\right) = i \sum_{л=1}^{m} \left(f^{[k-1]} \overline{f}^{[2n-k]} - f^{[2n-k]} \overline{f}^{[л-1]} \right)\Big|_{x=b} \tag{10}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$J = \begin{pmatrix} 0 & iK \\ -iK & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В линейном пространстве L $2n$ - мерных векторов $= (\ _1;\ _2; \ldots;\ _{2n})$, которые будем рассматривать как одностолбцевые матрицы, определим скалярное произведение по формуле

$$[\ ,\ ] = {}^{*} J \tag{11}$$

где * обозначает однострочную матрицу, сопряженную с . Согласно (10), пространство L с индефинитной метрикой (11) является граничным пространством оператора A. При этом граничный оператор Γ можно определить формулой $\Gamma f = \left(f(b); f^{[1]}(b); \ldots; f^{[2n-1]}(b) \right)$.

Оператор A^* порождается тем же дифференциальным выражением (8) и краевыми условиями $y\Big|_{x=b} = 0,\ y^{[1]}\Big|_{x=b} = 0, \ldots, y^{[2n-1]}\Big|_{x=b} = 0$. Граничным пространством оператора $-A^*$ служит то же пространство L со скалярным произведением (11), а соответствующий граничный оператор Γ' можно задать формулой $\Gamma' g = \left(-g(a); -g^{[1]}(a); \ldots; -g^{[2n-1]}(a)\right)$.

Множества регулярных точек $\Lambda(A)$ и $\Lambda\left(A^*\right)$ операторов A и A^* совпадают со всей комплексной плоскостью.

При любом комплексном Λ для любой функции $f(x)\in D(A)$ существует единственная функция $g(x)\in D(A^*)$, связанная с $f(x)$ равенством $Af-A^*g=\Lambda(f-g)$, которое в рассматриваемом здесь случае принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left(p_{n-k}(x)\frac{d^k}{dx^k}(f-g)\right)=\Lambda(f-g) \tag{12}$$

При любых $x_0, x\in[a,b]$, определим матрицу $W(x,x_0;\Lambda)$ формулой

$$W(x,x_0;\Lambda)=\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_{2n}(x)\\ y_1^{[1]}(x) & y_2^{[1]}(x) & \dots & y_{2n}^{[1]}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_1^{[2n-1]}(x) & y_2^{[2n-1]}(x) & \dots & y_{2n}^{[2n-1]}(x)\end{pmatrix},$$

где $y_1(x), y_2(x),\dots,y_{2n}(x)$ - решения дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left(p_{n-k}(x)\frac{d^ky}{dx^k}\right)=\Lambda y \tag{13}$$

Причем $y_1(x), y_2(x),\dots,y_{2n}(x)$ удовлетворяют также начальным условиям:

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0)=1, & y_2(x_0)=0, & \dots & y_{2n}(x_0)=0,\\ y_1^{[1]}(x_0)=0, & y_2^{[1]}(x_0)=1, & \dots & y_{2n}^{[1]}(x_0)=0,\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_1^{[2n-1]}(x_0)=0, & y_2^{[2n-1]}(x_0)=0, & \dots & y_{2n}^{[2n-1]}(x_0)=1.\end{array}$$

Если $y(x)$ - какое-либо решение уравнения (13), то

$$\begin{pmatrix} y(x)\\ y^{[1]}(x)\\ \dots\\ y^{[2n-1]}(x)\end{pmatrix}=W(x,x_0;\Lambda)\begin{pmatrix} y(x_0)\\ y^{[1]}(x_0)\\ \dots\\ y^{[2n-1]}(x_0)\end{pmatrix} \tag{14}$$

В силу (12), равенство (14) имеет место для функции $y(x)=f(x)-g(x)$. Полагая при этом $x_0=b$ и $x=a$, получаем:

$$\begin{pmatrix} -g(a)\\ -g^{[1]}(a)\\ \dots\\ -g^{[2n-1]}(a)\end{pmatrix}=W(a,b;\Lambda)\begin{pmatrix} f(b)\\ f^{[1]}(b)\\ \dots\\ f^{[2n-1]}(b)\end{pmatrix},$$

т.е. $\Gamma' g=W(a,b;\Lambda)\Gamma f$. Последнее соотношение показывает, что если характеристическую функцию $X(\Lambda)$ оператора A отождествить с соответствующей матричной функцией параметра Λ, то $X(\Lambda)=W(a,b;\Lambda)$.

Список литературы

1. Штраус А. В. Характеристические функции линейных операторов // ДАН СССР. 1959. Т. 126. С. 514–516.