

Акимов Андрей Анатольевич

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МОРАВЕЦ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2010/12/20.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2010. № 12 (43). С. 67-69. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2010/12/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

References

1. **Affordable housing** [Electronic Resource]. URL: http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Affordable_housing&oldid=389775947 (retrieved from 17.10.2010).
2. **Angel S.** Housing policy matters: a global analysis. New York, USA: Oxford University Press, 2000.
3. **Aronovici C.** Housing the masses. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1939. 294 p.
4. **Aurand A.** Density, housing types and mixed land use: smart tools for affordable housing? // Urban studies. 2010. Vol. 47. No. 5. P. 1015-1036.
5. **Brown L. R., Gardner G., Halweil B.** Beyond Malthus: nineteen dimensions of the population challenge // The worldwatch environmental alert series. New York - London: W. W. Norton and Company, 1999. 167 p.
6. **Deelstra T., Girardet H.** Thematic paper 2 - Urban agriculture and sustainable cities // Growing cities - growing food. RUAF Foundation, 2005.
7. **Delang C. O., Lung H. C.** Public housing and poverty concentration in urban neighbourhoods: the case of Hong Kong in the 1990s // Urban studies. 2010. Vol. 47. No. 7. P. 1391-1413.
8. **Duke J.** Mixed income housing policy and public housing residents' "right to the city" // Critical social policy. 2009. Vol. 29. P. 100-120.
9. **Dunn S.** Micropower: the next electrical era // Worldwatch paper. 2000. No. 151.
10. **Ellen I. G., Turner M. A.** Does neighborhood matter? Assessing recent evidence // Housing Policy Debate. 1997. No. 8 (4). P. 833-866.
11. **Fingleton B.** Housing supply, housing demand and affordability // Urban studies. 2008. Vol. 45 (8). P. 1545-1563.
12. **Ghirardo D.** Modern architecture // Microsoft Encarta reference library. 2005.
13. **Graham E., Manley D., Hiscock R., Boyle P., Doherty J.** Mixing housing tenures: is it good for social well-being? // Urban studies. 2009. Vol. 46 (1). P. 139-165.
14. **Hall J., Berry M.** Making housing assistance more efficient: a risk management approach // Ibidem. 2006. Vol. 43. No. 9. P. 1581-1604.
15. **Housing Developments (1939):** archives article from Collier's year book // Microsoft Encarta reference library. 2005.
16. **Housing Developments (1940):** archives article from Collier's year book // Ibidem.
17. **Kristensen H.** Social housing policy and the welfare state: a Danish perspective // Urban studies. 2002. Vol. 39. No. 2. P. 255-263.
18. **Lefebvre H.** Writings on cities / transl. and ed. by E. Kofman and E. Lebas. Cambridge, MA: Blackwell, 1996.
19. **Listokin D., Burchell R. W.** Housing (shelter) // Microsoft Encarta reference library. 2005.
20. **Meyerson M., Terrett B., Wheaton W. L. C.** Housing, people and cities. New York: McGraw-Hill, 1962.
21. **Nebel B. J., Wright R. T.** Environmental science. 4th ed. New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 1993. 630 p.
22. **Nigeria** [Electronic Resource]. URL: <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Nigeria&oldid=391256109> (retrieved from 19.10.2010).
23. **Nigeria. Federal Republic of Nigeria:** fourth national development plan. Lagos: National planning office; Federal Ministry of national planning, 1981-1985. Vol. 1.
24. **O'Meara M.** Reinventing cities for people and the planet // Worldwatch paper. 1999. No. 147.
25. **Olotuah A. O., Ajayi M. A.** Repositioning women in housing development in Nigeria // Indian journal of gender studies. 2008. Vol. 15. P. 101-113.
26. **Provision of affordable housing for the public:** communiqué on 1-day interactive forum / Nigerian society of engineers. Calabar Branch, 2010.
27. **Purcell M.** Citizenship and the right to the global city: reimagining the capitalist world order // International journal of urban and regional research. 2003. No. 27 (3). P. 564-590.
28. **Sawin J. L.** Mainstreaming renewable energy in the 21st century // Worldwatch paper. 2004. No. 169.
29. **Sheehan M. O.** City limits: putting the brakes on sprawl // Ibidem. 2001. No. 156.
30. **Sirmans C. F.** Mortgage // Microsoft Encarta reference library. 2005.
31. **Turner B.** Social housing finance in Sweden // Urban studies. 1999. Vol. 36. No. 4. P. 683-697.
32. **Van Kempen R., Priemus H.** Revolution in social housing in the Netherlands: possible effects of new housing policies // Ibidem. 2002. Vol. 39. No. 2. P. 237-253.
33. **Varady D. P., Walker C. C.** Housing vouchers and residential mobility // Journal of planning literature. 2003. No. 18 (1). P. 17-30.
34. **Whitehead C. M. E.** The provision of finance for social housing: the UK experience // Urban Studies. 1999. Vol. 36. No. 4. P. 657-672.
35. **Wilson W. J.** The truly disadvantaged. Chicago: University of Chicago Press, 1987.

УДК 517.95

Андрей Анатольевич Акимов

Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. З. Бишовой

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МОРАВЕЦ[©]

Рассмотрим уравнение

$$Lu = K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $uK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K'(y) > 0$ при $y > 0$, в области D , ограниченной кривой Γ из класса Ляпунова, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, а при $y < 0$ – кусочно-гладкой кривой $AC: dx + \sqrt{-K(y)} \geq 0$ и характеристикой $CB: dx - \sqrt{-K(y)} = 0$ уравнения (1), исходящими из точки C ; $x = x(s)$, $y = y(s)$ – параметрические уравнения границы ∂D , s – длина дуги границы ∂D , отсчитываемая точки B границы против часовой стрелки.

Пусть $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. Для уравнения (1) в области D поставим задачу типа Неймана, изученную К. Моравец [3].

Задача Моравец. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma \cup AC) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$\Delta_s[u]_{\Gamma} = K(y)u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} = \Phi(s), \quad 0 \leq s \leq l_1; \quad (4)$$

$$\Delta_s[u]_{AC} = \Phi(s), \quad l_1 \leq s \leq l_2; \quad (5)$$

где Φ – заданные достаточно гладкие функции, а l_1 – длина кривой Γ , а l_2 – длина кривой $\Gamma \cup AC$.

Пусть $t(y) = \int_0^y \sqrt{K(t)} dt$, а z_0 – предельное значение функции $z = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + t^2(y)}}\right)$ в точке A вдоль кривой Γ .

Определение 1. Регулярным решением в области D уравнения (1) будем называть функцию $u(x, y)$, если она удовлетворяет условиям (2) и (3) и, кроме того, в точках B и C частные производные u_x и u_y могут иметь особенность порядка меньше 1/2, а в окрестности точки A выполняется соотношение

$$K(y)u_x^2 + u_y^2 = O(\sqrt{K(y)r}), \quad (6)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + t^2(y)}, \quad \frac{z_0}{2} - 1 < \frac{z}{2} < \frac{z_0}{2}, \quad z > -1. \quad (7)$$

Пусть $\theta = \theta(s)$, $0 \leq s \leq l_1$ – угол между положительным направлением оси Ox и направлением касательной к кривой Γ , проведенной в сторону возрастания дуги s при обходе кривой. Будем считать, что для заданной кривой Γ существует такая положительная постоянная C , что в окрестности точки A на кривой Γ выполняется следующее условие

$$\frac{dx}{ds} > -C\sqrt{K(y)} \quad (8)$$

Пусть $u(x, y)$ есть регулярное в D решение уравнения (1). На множестве $D_+ \cup D_-$ рассмотрим криволинейный интеграл

$$\Psi(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (Ku_x^2 - u_y^2) dy - 2u_x u_y dx, \quad (9)$$

который в силу того, что $u(x, y)$ является решением уравнения (1) не зависит от пути интегрирования на этом множестве, и поэтому определяет функцию $\Psi(x, y)$. Поскольку $u(x, y)$ является регулярным в D решением уравнения (1), то функция $\Psi(x, y)$ непрерывна на замкнутой области $\bar{D}$ и имеет непрерывные частные производные всюду в D , за исключением, быть может, точек A, B и C .

Следующие приведённые леммы являются вспомогательными и используются при доказательстве основной теоремы.

Лемма 1. Если $K(y)u_x dy - u_y dx = 0$ на кривой AC , то для любой точки $X = (x, 0)$, принадлежащей отрезку AB , справедливо неравенство $\Psi(A) > \Psi(X)$ или $u_x = u_y = 0$ на отрезке AX .

Лемма 2. Если $K(y)u_x dy - u_y dx = 0$ на кривой AC , то функция $\Psi(x, y)$ в замкнутой области $\bar{D}$ принимает свое наибольшее значение на кривой Γ .

Лемма 3. Пусть $u(x, y)$ регулярное решение однородной задачи Моравец и в точке A выполняется условие (8). Тогда если кривая AC совпадает в малой окрестности точки A с характеристикой $K(y)u_x dy + u_y dx = 0$, то функция $\Psi(x, y)$ в точке A не может достигать изолированного наибольшего значения.

Остановимся на последней лемме подробнее. В работе [2] данная лемма сформулирована без условия совпадения кривой AC с характеристикой $K(y)u_x dy + u_y dx = 0$ в окрестности точки $u(x, y)$. Однако при доказательстве требуется установить знак следующего интеграла $\int_{AA_1} x^- \Psi_x(x, 0) dx$, где A_1 – точка лежащая

на оси Ox , достаточно близко к A . Так как при доказательстве леммы предполагается, что в точке A функция $u(x, y)$ достигает наибольшее значение, то на этом основании делается вывод, что на оси Ox в области D найдётся окрестность точки A , где $\Psi_x(x, 0) \leq 0$, а значит и $\int_{AA_1} x^- \Psi_x(x, 0) dx \leq 0$.

Поскольку в общем случае для произвольной функции утверждение неверно, возникает необходимость доказать, что это действительно так. В следующей лемме это утверждение доказывается, но только при дополнительном условии, наложенном на кривую AC .

Лемма 4. Если функция $u(x, y)$ своё наибольшее значение по области $\bar{D}$ принимает в точке A и кривая AC совпадает в некоторой окрестности точки A с характеристикой $K(y)u_x dy + u_y dx = 0$, то найдётся такая окрестность точки A на оси Ox , где $\int_{AA_1} x^- \Psi_x(x, 0) dx \leq 0$.

Доказательство. Обозначим за AA_2 часть кривой AC , которая совпадает с характеристикой $K(y)u_x dy + u_y dx = 0$. Проведём через точку A_2 характеристику $K(y)u_x dy - u_y dx = 0$ и обозначим точку пересечения этой характеристики с осью Ox как A_1 . Рассмотрим следующий интеграл по области, ограниченной осью абсцисс и кривыми AA_2 , A_1A_2

$$\iint_{AA_1A_2} x^- u_x (Ku_{xx} + u_{yy}) dx dy = 0$$

Так как

$$x^- Ku_{xx} = \frac{1}{2} (x^- Ku_x^2)_x + \frac{1}{2} x^- Ku_x^2$$

$$x^- u_x u_{yy} = \frac{1}{2} (x^- u_x u_y)_y + \frac{1}{2} (x^- u_y^2)_x - \frac{1}{2} x^- u_y^2,$$

то используя формулу Гаусса-Остроградского для области AA_1A_2 получим

$$\begin{aligned} \iint_{AA_1A_2} x^- u_x (Ku_{xx} + u_{yy}) dx dy &= \oint_{AA_2 \cup A_2A_1 \cup A_1A} \left(\frac{1}{2} x^- u_y^2 dy + x^- u_x u_y dx - \frac{1}{2} x^- Ku_x^2 dy \right) + \\ &+ \iint_{AA_1A_2} \left(x^- u_y^2 - \frac{1}{2} x^- Ku_x^2 \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Поскольку условие $\Delta_s[u]|_{AC} = 0$ на части кривой AA_2 , совпадающей с характеристикой, равносильно условию $u|_{AA_2} = 0$ окончательно получаем

$$\int_{AA_2} x^- Ku_x^2 \left(1 - K \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) dy + \int_{A_2A_1} x^- (\sqrt{-K} u_x + u_y)^2 dy - 2 \int_A^{A_1} x^- u_x u_y dx - \iint_{AA_1A_2} x^- (Ku_x^2 - u_y^2) dx dy = 0.$$

Поскольку $\sqrt{-K} > 0$ и первый, второй, четвертый интегралы положительны, получаем что

$$\int_A^{A_1} x^- u_x u_y dx \geq 0.$$

С учётом равенства $\int_{AA_1} x^- \Psi_x(x, 0) dx = - \int_A^{A_1} x^- u_x u_y dx$ получаем требуемое утверждение $\int_{AA_1} x^- \Psi_x(x, 0) dx \leq 0$.

Теорема. Пусть $u(x, y)$ – регулярное решение обобщенной задачи Моравец с нулевыми граничными условиями. Если кривая Γ удовлетворяет условию (8), а кривая AC в достаточно малой окрестности точки A совпадает с характеристикой $dx + \sqrt{-K(y)} = 0$, то $u(x, y) \equiv \text{const}$.

Подробное доказательство теоремы можно найти в работе [1].

Список литературы

1. **Акимов А. А.** Задача Моравец для обобщенного уравнения Трикоми // Сибирские электронные математические известия. 2006. Т. 30. С. 71–82.
2. **Morawetz C. S.** Note on a maximum principle and uniqueness theorem for an elliptic-hyperbolic equation // Proc. Roy. Soc. 1956. V. 236. № 1024. P. 141–144.
3. **Morawetz C. S.** Uniqueness for the analogue of the Neuman problem for mixed equations // Michigan mathem. j. 1957. V. 4. № 1. P. 5–14.