совершается в универсуме, так что тот, кто видит, мог бы в каждом теле прочесть, что совершается повсюду» [Там же].

Таким образом, по справедливому замечанию П. П. Гайденко, «*философия Лейбница есть своего рода симбиоз науки Нового времени с метафизикой античного аристотелизма и платонизма*» [1, с. 233]. Лейбниц одухотворял Природу посредством монад, борясь с механицизмом, хотя при этом, фактически, заменял одну абсолютизацию - *механицизм чистый* - на свою - *механицизм духовно-божественный*, отрицавший материю и пространство как таковые. Отрицая всякое взаимодействие между простыми субстанциями (монадами) и провозглашая его для сложных субстанций (тел), Лейбниц создаёт несколько противоречивый дуализм в понимании его теории устройства Мира.

Список литературы

1. **Гайденко П. П.** История новоевропейской философии в её связи с наукой. Изд. 2-е, испр. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 376 с.
2. **Декарт Р.** Сочинения: в 2-х т. / пер. с лат. и франц.; сост., ред., вступ. ст. В. В. Соколова. М.: Мысль, 1989. Т. I. 654 с.
3. **Декарт Р.** Указ. соч. М.: Мысль, 1994. Т. II. 633 с.
4. **Лейбниц Г. В.** Монадология [Электронный ресурс]. URL: http://orel.rsl.ru/nettext/foreign/leibniz/monadologia.htm (дата обращения: 20.03.09).
5. **Мах Э.** Познание и заблуждение: очерки по психологии исследования. М.: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2003. 456 с.
6. **Рассел Б.** История западной философии и её связи с политическими и социальными условиями от Античности до наших дней: в 3-х кн. Изд. 6-е, стереотип. М.: Академический проект; Деловая книга, 2008. 1008 с.

УДК 101.1; 167; 510

Евгений Валериевич Ковешников
Уссурийский государственный педагогический институт

ПОДХОДЫ К ОБОСНОВАНИЮ МАТЕМАТИКИ: СКВОЗЬ ПАРАДОКСЫ К ПРОЗРАЧНОЙ НЕПРОТИВОРЕЧИВОЙ ТЕОРИИ©

Понятие определённости является наиважнейшим для математики. Если в таких науках, как, например, исторические, неоднозначность трактовки того или иного исторического события встречается очень часто и иногда даже приветствуется (так называемый плюрализм мнений), то в математике двойственное понимание одного и того же математического закона или объекта просто недопустимо. С самого своего возникновения математика стремилась к прозрачности своих рассуждений, их логической чистоте, определённости и полноте. Наиболее верный способ этого достигнуть - создать базовое ядро, в которое войдут основные положения, не нуждающиеся в доказательстве, то есть построить аксиоматику, с помощью которой можно упорядочить математическое знание, привести его в строгую систему.

По мере развития математического знания, в математике возникают критические, переломные моменты, когда требуется прибегнуть к обоснованию науки, чтобы сами математики не утратили веру в истинность и устойчивость того знания, что уже есть на данный момент, и чтобы математика могла развиваться дальше. История обоснования математики - это и история самой математики. Сама программа обоснования эволюционировала и усложнялась от эпохи к эпохе. «*Для математиков Древней Греции, столкнувшихся с проблемой несоизмеримых величин, проблема обоснования, как мы можем предполагать на основе дошедших до нас сведений, состояла в том, чтобы найти способы обращения с произвольными отношениями величин, не отбрасывая иррациональных величин и не отступая от точности вычислений. Они разрешили эту проблему через использование геометрических построений*» [2, с. 9-10]. Что касается математики XVII века, то учёные того времени «*усматривали неясные моменты в использовании мнимых и иррациональных чисел, которые не укладывались в принятые представления о математической реальности*», а обоснование видели в «*отыскании убедительной реальной (физической или метафизической) интерпретации для этих чисел*» [Там же, с. 10]. В XVIII веке, когда строилось здание анализа и дифференциального исчисления как его части, а положения новой теории ещё не были достаточно строгими и точными, «*проблема обоснования состояла в уточнении исходных понятий новой теории и в возвращении к идеалу строгости, который был задан классическими образцами*» [Там же].

В XIX веке спокойствие в математике было нарушено Лобачевским и Риманом, которые низвергли давнюю догму о том, что геометрия Евклида - *единственно возможная геометрия* в математике. Так были, хоть и с большим трудом, обоснованы первые неевклидовы геометрии. Наконец, на рубеже XIX-XX веков произошёл глобальный кризис математики, потрясший весь математический мир и давший сразу несколько подходов обоснования этой науки в эпоху Новейшего времени. Хотя такой авторитетный исследователь в области философии математики, как доктор философских наук, профессор В. А. Светлов, склонен считать, что кризиса математики, как такового, не было. Был кризис *методологии математики*, вызванный быстрым и не всегда обоснованным введением в математику новой и ещё не до конца доработанной *теории множеств* Георга Кантора, где он постулировал понятие новой, *актуальной*, бесконечности [4, с. 34]. Это довольно неопределённое и неясное понятие, в отличие от *потенциальной* бесконечности, которая эквивалентна ряду натуральных чисел (или словам «и так далее»). Итогом кризиса методологии математики стало четыре направления её обоснования: *логицизм* (основание математики - логика), *интуиционизм* (основание математики - в априорной интуиции времени), *конструктивизм* (основание математики - в точном предписании, называемом алгорифмом) и *формализм* (основание математики - в представлении её в виде исчисления) [Там же, с. 5].

Сущность программы *логицизма* заключается в том, «*чтобы определить основные, исходные понятия чистой математики в терминах логики, а её фундаментальные законы доказать как теоремы логики*» [3, с. 228]. А поскольку в фундаменте математики лежит арифметика натуральных чисел, то достаточно перевести на язык логики основные понятия арифметики, а её законы доказать как логические теоремы. Первым известным логицистом был математик Готтлоб Фреге (1848-1925). Своей задачей Фреге ставил выразить через математическую логику такие арифметические понятия, как число, множество, равенство, переменная и функция, причём число как фундамент арифметики надо было подвергнуть логическому анализу максимально строго. А для выполнения программы логицизма нужно было построить аксиоматику. Фреге «*представил математическую логику в виде аксиоматической системы, в которой все её положения можно получить по строго сформулированным правилам вывода из немногих исходных принципов (аксиом) логики*» [Там же, с. 230]. Таким образом, Фреге поставил себе задачу вывести всю математику из бинарной математической логики. Однако такому грандиозному замыслу не суждено было свершиться. Б. Рассел, исследуя логическую систему обоснования Фреге, нашёл в ней логическую ошибку, из-за чего безупречная с виду теория сразу стала *противоречивой*. Это так называемый парадокс Рассела, схожий с парадоксом лжеца. Слабость логицизма Фреге скрывалась в вере во всесильность законов логики и возможность их неограниченного применения. «*Иначе говоря, область применения законов символической логики, как вообще формальной логики, имеет определённые границы. Попытка применения этих законов ко всем без исключения предметам приводит к логическим противоречиям, о чём как раз и свидетельствуют парадоксы*» [Там же, с. 231-232]. Здесь как раз имела место парадигма абсолютизации, свойственная исследователям эпохи Нового времени.

Уже на новом фундаменте программу логицизма продолжил развивать Бертран Рассел. Чтобы избежать открытого им же парадокса о множестве всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента, Рассел вводит искусственное понятие *иерархии типов*. Так, теперь *элемент* множества и само *множество* относятся к разным иерархическим типам, то есть говорить о *классе всех классов* не имеет смысла, ибо данная структура находится вне теории типов, она в ней незаконна. Пытаясь избежать парадоксов, Рассел вводит ряд довольно искусственных аксиом, что вызывает критику со стороны математического сообщества (аксиома бесконечности, аксиома выбора, аксиома мультипликативности).

Таким образом, *теория типов Б. Рассела* является одной из ряда *аксиоматик теории множеств*. Математик Э. Цермело также построил свою систему аксиом, получившую потом название *теории множеств Цермело*. Обе аксиоматики были опубликованы в 1908 году и в дальнейшем претерпели уточнение и расширение в работах последующих исследователей, а на их базе были созданы новые системы аксиом теории множеств [5, с. 10].

Сама же программа логицистов обоснования математики не достигла своей цели и вот почему. «*Если исходить из духа и буквы логицистской концепции, предлагаемое обоснование должно исключить всё, что является в математике, и прежде всего в её предпосылках, ненеобходимым - эмпирическим, интуитивным, психологическим. Основоположникам логицизма казалось, что самый близкий и эффективный путь для достижения такой цели - последовательная логическая перестройка всей математики, начиная с её оснований и заканчивая ведущими разделами, превращение её в одно общее исчисление. Однако именно то, что они исключили ради достижения надёжности и строгости математики, с точки зрения обоснования математики оказывается для неё самым важным. Обоснование математики неотделимо от интеллектуальных, логических и, возможно, культурных предпосылок. Их игнорирование превращает математику в абсолютно замкнутую и, как мы знаем, принципиально неполную систему и лишает её источника развития*» [4, с. 78].

Формализм - ещё одно направление обоснования математики. Он генетически близок к логицизму, но всё же сильно отличается от него. Программа логицизма имела в своём фундаменте чистую логику. Формализм же, помимо логики вобрал в себя и идею актуальной бесконечности Кантора. В чём идея этой новой бесконечности и чем она отличается от старой, потенциальной? Так, бесконечность натурального ряда N - это потенциальная бесконечность. Начавшись от 1, ряд безудержно уходит вправо, в бесконечность. Указав в этом ряду сколь угодно удалённую от 1 точку, мы за ней справа непременно найдём ещё точку. И так будет каждый раз. А вот действительный отрезок $[0,1]\subset R$ символизирует как раз актуальную бесконечность. И хотя эта бесконечность чисто внешне гораздо более компактна, чем натуральный ряд неопределённой длины, она всё же является *более сильным понятием бесконечного*. Если натуральный ряд можно сравнить с материальным объектом неопределённо большой протяжённости (планета-гигант, звезда, туманность), то отрезок [0,1] - это своеобразная «чёрная дыра» в математической вселенной, континуум. Её точки настолько плотно подогнаны друг к другу, настолько плотно упакованы, что между любыми двумя сколь угодно близкими точками будет также бесконечно много точек, а не пустота, как этого можно добиться для натурального ряда. К тому же, и это принципиально важно, на этом отрезке *любая* система вложенных друг в друга отрезков (почти по аналогии с матрёшками) будет иметь непустое пересечение (определение континуума по Кантору). Данное свойство явно отсутствует у дискретного натурального ряда (n вложенных матрёшек всегда пересекаются только по пустому воздуху внутри последней, то есть *не имеют общего*, поэтому в аналогии и написано «почти»). Более того, мощность множества-отрезка [0,1] равна мощности множества-квадрата [0,1]×[0,1] и равна мощности множества-куба [0,1]×[0,1]×[0,1], то есть во всех этих геометрических структурах *одинаково бесконечно много* точек. Такое математическое положение было явно неклассическим, причём даже сам Кантор был ему сильно удивлён, строго доказав его.

К школе формалистов относятся В. Аккерман, П. Бернайс, Г. Генцен, Дж. фон Нейман, Ж. Эрбран. Главным же идеологом формализма был немецкий математик и геометр Давид Гильберт. В своё время он заново аксиоматизировал классическую геометрию Евклида, сделав её более полной, стройной и уже без явных парадоксов. Теперь же идею аксиоматизации Гильберт решил распространить на арифметику (основа математики) и теорию множеств (как содержащую важное понятие актуальной бесконечности).

Главной целью программы Гильберта было доказать непротиворечивость математики, то есть отсутствие в ней парадоксов (неопределённостей). Оперировать понятием актуальной бесконечности при обосновании было бы крайне затруднительно, но и отказаться от неё было нельзя, иначе математика окажется неполной, однако Гильберт нашёл решение. «*Основная идея Гильберта проста. Чтобы не быть зависимой от абстракции бесконечности в своём основании, математика должна строиться с допущением существования конечных систем объектов и использовать содержательные, исключающие суждения о бесконечности, рассуждения. <…> Бесконечность - идеальный конструкт, абстракция (интерполяция или экстраполяция) очень больших и очень малых величин, изобретение нашего ума, но не более. <…> Значит, бесконечное, если математик не хочет совершить ошибку, должно быть исключено из посылок его рассуждений об основаниях математики*» [Там же, с. 135-136].

Для формализации арифметики натуральных чисел Гильберт выписал конечный набор аксиом: 4 аксиомы логики высказываний, 4 трансфинитные аксиомы и 4 математические аксиомы вошли в этот набор. Дальше оставался только один шаг - показать, что из этого списка аксиом нельзя вывести два противоположных высказывания. Тем самым, полагал Гильберт, непротиворечивость арифметики будет доказана, а значит, и вся математика является непротиворечивой, не содержащей парадоксов. Как отмечает Светлов, «*некоторое время казалось, что программа финитного обоснования математики Гильберта должна вот-вот получить триумфальное завершение. Однако в начале 30-х гг. XX в. были открыты такие ограничения, которые поставили под сомнение её осуществление в полном объёме*» [Там же, с. 149]. Речь шла, конечно же, об открытии Куртом Гёделем невозможности доказать непротиворечивость математики средствами самой математики. Собственно, и программа логицизма также теряла свой смысл в свете этого открытия. Таким образом, аксиоматизация, - этот самый сильный и строгий метод в математике, - оказался не универсальным, а его успешное применение в малой области математики вовсе не гарантировало такое же успешное применение метода к математике вообще. Следует подчеркнуть, что формализм Гильберта - это частный случай построения аксиоматики, более общего математического метода, вобравшего в себя, в том числе, и логицизм.

В истории науки известны ещё две программы обоснования математики. Они диаметрально противоположны двум описанным выше подходам, но очень близки между собой, как логицизм и формализм. Это конструктивизм и интуиционизм.

Конструктивизм, по мнению историков математики, возник в конце XIX века как ответ на теорию множеств Кантора и Р. Дедекинда, как ответ на постулирование в математике понятия актуальной бесконечности. Собственно, одной из причин формализма Гильберта была как раз актуальная бесконечность Кантора, но там она выступала как часть программы, а здесь, в конструктивизме, актуальная бесконечность отвергалась в принципе. Идея конструктивизма очень проста: *в математике имеет право на существование только тот объект, который можно сконструировать за конечное число умственных операций*. Истинно только то, что можно доказать. Если мы предположили, что некий математический объект существует, но в ходе его построения получили парадокс, значит, этот объект не может существовать, то есть ложен. Определения, содержащие порочный круг, исключались. Видными конструктивистами были Э. Борель, Л. Кронекер, А. Пуанкаре. Конструктивисты отвергали не только актуальную бесконечность, но и пересматривали числовые системы. Таким образом, иррациональные числа оказались вне конструктивистского закона, как и действительные числа - воплощение актуальной бесконечности. Особенно известен своей критикой был Кронекер, признававший только натуральные числа, а остальные считавший «делом рук человеческих».

В начале XX века из конструктивизма вышло направление *интуиционизма* во главе с голландским математиком Л. Э. Я. Брауэром. Вот как комментирует ситуацию доктор философских наук, профессор В. В. Целищев: «*На протяжении всей истории математики менялись требования к строгости доказательств. Интуитивно понятные доказательства теорем в XVII-XVIII веках постепенно сменились строгими формальными выкладками. При этом внутри профессионального сообщества стали нарастать разногласия относительно природы и надежности доказательств. В итоге к началу XX века в математическом сообществе возникла «схизма», противоположные лагеря которой возглавили немецкий учёный, «король математики» Давид Гильберт и голландский математик Лёйтзен Брауэр*» [6, с. 156]. При этом, естественно, понимание строгости математического доказательства было напрямую связано с пониманием бесконечного в математике. «*Центральное место в интуиционистской математике занимает идея бесконечной последовательности свободных выборов и основанная на ней теория континуума. Понятие бесконечной последовательности свободных выборов означает возможность в произвольном порядке приписывать каждому члену некоторой последовательности определённый предикат (например, натуральное число в качестве номера члена последовательности). Брауэр доказывает фундаментальную теорему интуиционистской математики, указывающую условия, при которых можно построить континуум действительных чисел*» [4, с. 86]. Таким образом, интуиционистская математика Брауэра оказывалась намного шире математики ранних конструктивистов, ибо она признавала действительные числа. К интуиционистам относятся также Г. Вейль, А. Тарский, А. Гейтинг и другие.

Как пишет известный исследователь в области философии математики В. Я. Перминов, «*Брауэр сформулировал строгий критерий приемлемости математических суждений. Этот критерий он усмотрел в свойстве интуитивной ясности исходных математических объектов и в конструктивном введении производных объектов и их свойств. Отрицательная критика абстрактной математики, которая преобладала у Кронекера, была заменена позитивной программой представления математики на основе понятия конструктивности. Все аргументы Брауэра против классической логики прямо или косвенно связаны с этим критерием приемлемости математических суждений*» [2, с. 132]. Таким образом, Брауэр довольно критично относился к классической бинарной логике, предлагая пересмотреть один из её постулатов - закон исключённого третьего.

В 40-е годы XX века в СССР также возникло направление конструктивизма-интуиционизма. А. А. Марков (1903-1979), стоявший во главе отечественной школы, «*отверг идею Брауэра о математике как свободном творении человеческого ума, но сохранил допущение о потенциальной бесконечности её объектов, необходимости конечных и эффективных доказательств согласно особой конструктивной (фактически интуиционистской) логике*» [4, с. 86]. Марков придерживался понятия *алгорифма*, то есть строгого предписания, как за конечное число шагов построить математический объект. Как отмечает Г. И. Рузавин, «*понятие алгорифма применяется в математике уже давно. Ещё у Евклида мы встречаемся с алгорифмом нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. Но это понятие скорее осознавалось интуитивно, чем определялось точно*» [3, с. 264]. У Маркова же мы находим уточнение и строгое определение этого понятия.

Примерно в одно время с Марковым к идее алгоритмизации пришёл и американский математик Э. Бишоп, назвавший математику «языком высокого уровня программирования». Он же установил важное соответствие между классической и неклассической математикой: *все утверждения конструктивной математики выполняются в классической, а все теоремы классической математики имеют смысл в конструктивной, если отказаться от логического закона исключённого третьего* [4, с. 89]. А если мы отказываемся от закона исключённого третьего, то тем самым либо игнорируем парадоксы, либо их вовсе узакониваем.

Таким образом, конструктивизм ставил под сомнение не только идею актуальной бесконечности, но и критично относился ко всем теоремам, действующим в рамках континуума действительных чисел. Так, в математическом анализе есть теорема, носящая название *Первой теоремы Больцано-Коши*: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, и $f(a)\cdot f(b)<0$, то тогда на этом отрезке обязательно должна существовать такая точка c, что $f(c)=0$. Обыденный смысл этой теоремы прост: если на некотором наблюдаемом участке местности человек сначала шёл по одной обочине дороги, а потом его увидели идущим по противоположной обочине, то это значит, что где-то, на каком-то этапе пути он эту дорогу пересёк, оказался непосредственно на ней в какой-то момент времени. Или так: пусть тело на некотором промежутке времени двигалось сначала в одном направлении, а потом стало двигаться в противоположном, но нигде не поворачивало, то есть траекторией его движения была прямая линия. Это значит, что в какой-то момент времени (при смене направления) скорость тела была равна нулю, тело останавливалось. Из этих двух примеров ясно виден физический смысл этой простой, но важной математической теоремы. Однако парадокс (неопределённость) в том, что теорема *лишь предсказывает* нулевое значение функции на отрезке, но *ничего не говорит* нам о том, *где конкретно* оно будет достигнуто. Да и самих функций существует бесконечно много, но в теореме указана *не конкретная* функция, а подразумеваются сразу *все* непрерывные на $[a,b]$ функции, все, что есть. И даже простое утверждение о том, что некоторая *конкретная* функция $f(x)$ непрерывна *в каждой точке континуума* $[a,b]\subset R$, с конструктивистской точки зрения, лишено смысла. За эти неопределённости справедливо и ухватились конструктивисты, указав на них учёным от классической математики.

На нечто подобное указывает и известный исследователь в области истории, философии и методологии математики Ю. И. Манин: «*Рассмотрим такое просто формулируемое утверждение, как гипотезу Ферма* (для любых целых x, y, z и целого $n>2$ невозможно равенство: $x^n+y^n=z^n$ - авт.). *Хотя мы не знаем ни её доказательства, ни опровержения, мы уверены, что она либо истинна, - либо ложна. Эта уверенность основана на абстракции возможности произвести бесконечно много арифметических действий (или «раскладываний на кучки»), перебрав все суммы степеней пар целых чисел. Вообще, понятие об истинности (большинства) математических утверждений включает в себя представление о таких бесконечных сериях проверок. Между тем всякое математическое доказательство, т.е. рассуждение, состоящее из последовательного применения аксиом или логических правил вывода, есть существенно конечная процедура*» [1, с. 140].

Итак, из четырёх базовых направлений обоснования математики в XX веке ни одно не имело явного приоритета. Что-то принималось математическим сообществом, что-то резко критиковалось. В поисках преодоления неполноты и неопределённости классической математической науки математики выдвигали обозначенные выше концепции (в полной мере с ними можно ознакомиться у Рузавина в [2], Перминова в [3] и Светлова в [4]), но все они имели слабые места. Неопределённости, например, в конструктивизме и интуиционизме были видны с высокой степенью очевидности, а, например, в том же формализме неопределённости были глубоко скрытыми и обнаружились только после опубликования идей Гёделя. Если бы не это открытие, концепция Гильберта, возможно, одержала бы верх в этой жаркой борьбе идей[1].

Однако все попытки обосновать математику в XX веке не были пустой тратой интеллектуальных сил, как не были пустой тратой сил попытки на протяжении веков доказать V постулат Евклида. Точные науки получили большой импульс к развитию. Логицизм Фреге и Рассела расширил и укрепил математическую логику. А это, фактически, арматура здания всей науки. Современная математическая логика - наследие той эпохи. Формализм Гильберта вообще является образцом для построения математической теории, претендующей на право быть строгой, но в то же время прозрачной. А конструктивизм и интуиционизм весьма сильно сблизили математику и недавно появившуюся вычислительную технику - ЭВМ стала настоящим продолжением математики, её материальным воплощением, а сама математика и математическая логика послужили базой для построения всех языков программирования. Появилось качественно новое понятие *компьютерного эксперимента в математике*. Вообще, в науке почти никакое подлинно интеллектуальное усилие не пропадает даром. Вопрос лишь в том, когда его оценят.

Важно отметить, что и сегодня, в эпоху Современности, в научном мире идут горячие дискуссии вокруг обоснования математики, но уже не только как инструмента для оперирования с абстрактными объектами, а как мощного средства описания реальных физических объектов и явлений окружающего мира. Вот уже почти 40 лет математик Бенуа Мандельброт и его единомышленники стараются обосновать перед лицом мирового математического сообщества молодую ветвь геометрии - фрактальную геометрию - плод союза математики и ЭВМ. Они весьма убедительно доказывают, что это не просто гибрид математической теории с графическими машинными алгоритмами (по сути - полноправная разновидность конструктивной математики!), а мощный инструмент для математического описания Природы, инструмент, который, вероятно, сможет завершить программу, поставленную ещё Пифагорейской школой и Платоном - *программу геометризации* нашего Мира.

Если говорить об отечественной научной школе, то сегодня известным экспертом в области проблемы обоснования математики в вопросе применении её к физике является Юрий Иванович Манин [1]: «*…общение физика и математика часто затруднено тем, что физик склонен переходить от формул прямо к их физическому смыслу, минуя «математический смысл». <…> Хороший физик пользуется формализмом, как поэт - естественным языком. Пренебрежение ригористическими запретами оправдывается конечной апелляцией к физической истине, чего не может позволить себе математик. Выбор лагранжиана в единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий Салама-Вейнберга, введение в него полей Хиггса, вычитание вакуумных средних и прочее колдовство, приводящее, скажем, к предсказанию нейтральных токов, оставляет математика в состоянии немого изумления*» [Там же, с. 141].

Список литературы

1. **Манин Ю. И.** Математика как метафора. М.: МЦНМО, 2008. 400 с.
2. **Перминов В. Я.** Философия и основания математики. М.: Прогресс-Традиция, 2001. 320 с.
3. **Рузавин Г. И.** О природе математического знания: очерки по методологии математики. М.: Мысль, 1968.
4. **Светлов В. А.** Философия математики: основные программы обоснования математики XX столетия: учебное пособие. М.: КомКнига, 2006. 208 с.
5. **Хао В.**, **Мак-Нотон Р.** Аксиоматические системы теории множеств / пер. с франц. М.: Издательство иностранной литературы, 1963.
6. **Целищев В. В.** Всё есть число? // Вокруг света. 2008. № 9 (2816). С. 150-160.

[1] А, возможно, судьба программы формализма Гильберта была предрешена, ведь помимо Гёделя к похожей идее независимо пришёл и его современник – логик А. Тарский, сформулировавший её в своей теореме об истине: *множество всех истинных высказываний непротиворечивой формализованной системы, включающей элементарную арифметику, неопределимо в этой системе* [4, с. 157].