УДК 532.546

Мирлан Бегалиевич Шамырканов
Ысык-Кульский государственный университет им. К. Тыныстанова, Кыргызская Республика

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД В ОДНОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ©

Одной из основных задач мелиорации является обеспечение влагой корневой системы сельскохозяйственных культур. При близком залегании грунтовых вод к поверхности земли эту задачу можно решить путем поддержания уровня грунтовых вод в заданном режиме.

Движение грунтовых вод в верхнем покровном слое земли в стационарном режиме описывается уравнением Буссинеска [2]

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[k_в(h-b)\frac{\partial h}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[k_в(h-b)\frac{\partial h}{\partial y}\right]+qh=f(x,y),\quad (x,y)\in D \tag{1}$$

с граничным условием

$$k_в(h-b)\frac{\partial h}{\partial n}+\quad h=\quad,\quad (x,y)\in S, \tag{2}$$

где $h=h(x,y)$ - уровень грунтовых вод; $k_в=k_в(x,y)$ - коэффициент фильтрации покровного слоя; $b=b(x,y)$ - поверхность раздела между покровным слоем и подстилающей его слабопроницаемой прослойкой; $f(x,y)$ - функция инфильтрации; $q=q(x,y)$ - функция, учитывающая переток из нижележащего напорного водоносного горизонта (если переток отсутствует, то $q=0$); $=\ (x,y)$ и $=\ (x,y)$ - заданные функции; $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к границе области фильтрации; D - область фильтрации в плане, $S=\partial D$ - граница области D.

Управление уровнем грунтовых вод производится путем проведения поливов (при низком залегании грунтовых вод) или осушительных мероприятий (при высоком залегании). В математической модели фильтрации (1) эти мероприятия осуществляются функцией $f(x,y)$. Тогда задача оптимального управления уровнем грунтовых вод ставится следующим образом.

Требуется найти функцию $f(x,y)$, доставляющую минимум функционалу [1]

$$I(f)=\iint_D\left[h(x,y;f)-\Phi(x,y)\right]^2dx\,dy+\quad\iint_D f^2(x,y)\,dx\,dy, \tag{3}$$

где $\Phi(x,y)$ - заданные уровни грунтовых вод; - параметр регуляризации; $h(x,y;f)$ - расчетные значения уровня грунтовых вод, получаемые решением задачи (1), (2) при изменении инфильтрации $f(x,y)$.

При численном решении задачи (1), (2) значения функции $h(x,y;f)$ получаются в дискретном множестве точек, т.е. в узлах расчетной сетки. Поэтому в практических расчетах пользуемся дискретным аналогом формулы (3):

$$J(f)=\sum_{k=1}^{n}\left[h(x_k,y_k;f_k)-\Phi(x_k,y_k)\right]^2+\quad\sum_{k=1}^{n}f_k^2 \tag{4}$$

В общем случае зависимость функции $h(x,y;f)$ от управления $f(x,y)$ нелинейная, поэтому линеаризуем функцию $f(x,y;f)$ следующем образом:

$$h(x,y;f)=\tilde{h}+\sum_{j=1}^{n}\left(f_j-\tilde{f}_j\right)\frac{\partial h}{\partial f_j}+R_2(\Delta f), \tag{5}$$

где $\tilde{f}$ - значения функции f, полученные в предыдущей итерации; $\tilde{h}$ - соответствующие им значения уровней грунтовых вод; $\Delta f=f-\tilde{f}$.

Подставим выражение для функции h из (5) в формулу (4):

$$J(f)\approx\sum_{k=1}^{n}\left[\tilde{h}_k+\sum_{j=1}^{n}\left(f_j-\tilde{f}_j\right)\frac{\partial h_k}{\partial f_j}-\Phi_k\right]^2+\quad\sum_{k=1}^{n}\left(f_k-\tilde{f}_k\right)^2$$

и к функции многих переменных $J(f)$ применим необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial J(f)}{\partial f_i}=0,\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\tilde{h}_k+\sum_{j=1}^{n}\left(f_j-\tilde{f}_j\right)\frac{\partial h_k}{\partial f_j}-\Phi_k\right]\frac{\partial h_k}{\partial f_i}+\quad\left(f_i-\tilde{f}_i\right)=0\ ,\ \ i=1,2,...,n \qquad (6)$$

Полученную систему линейных алгебраических уравнений (6) запишем относительно $\Delta f_j = f_j-\tilde{f}_j$:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\Delta f_j=b_i\,,\quad i=1,2,...,n\,, \qquad (7)$$

где

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h_k}{\partial f_i}\,\frac{\partial h_k}{\partial f_j},\qquad i\neq j,\quad a_{ii}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial h_k}{\partial f_i}\right)^2+\quad,\qquad i=j,$$

$$b_i=\sum_{k=1}^{n}\left(\Phi_k-\tilde{h}_k\right)\frac{\partial h_k}{\partial f_i}$$

После решения системы (7) составляем следующее приближение управления:

$$f\left(x_i,y_i\right)=\tilde{f}\left(x_i,y_i\right)+\Delta f\left(x_i,y_i\right),\ \ i=1,2,...,n \qquad (8)$$

Для проведения расчетов по описанному алгоритму в качестве начальных приближений уровней грунтовых вод и инфильтрации берем их существующие состояния. Затем придаем функции $f\left(x,y\right)$ приращения, пропорциональные разности $\Phi(x,y)-h\left(x,y\right)$, вычисляем матрицу производных $\left(\frac{\partial h}{\partial f}\right)$ и, решив систему (7), находим $\Delta f\left(x,y\right)$ и по формуле (8) определяем новое приближение управления. Для каждого следующего приближения управления вычисляем соответствующие значения уровней грунтовых вод. Признаком окончания счета является выполнение условия

$$\max_i\left|h_i-\Phi_i\right|<\quad,\ \ i=1,2,...,n\,,$$

где $\ >0$ – заданное малое число.

Теперь остановимся на решении задачи (1), (2). Введем обозначение

$$T(x,y)=k_в\left(h^{(0)}-b\right), \qquad (9)$$

где $h^{(0)}$ - начальное приближение уровней грунтовых вод, так что задача (1), (2) становится линейной. Решаем её методом конечных элементов [3]. Область фильтрации D разбивается на треугольные элементы и внутри элемента *(e)* функция $h\left(x,y\right)$ представляется в виде

$$h^{(e)}\left(x,y\right)=N_i^{(e)}\left(x,y\right)h_i+N_j^{(e)}\left(x,y\right)h_j+N_k^{(e)}\left(x,y\right)h_k\,, \qquad (10)$$

где $h_r=h\left(x_r,y_r\right)$, $\left(r=i,j,k\right)$ - узловые значения искомой функции; $N_r\left(x,y\right)$ - линейные базисные функции:

$$N_i^{(e)}\left(x,y\right)=\left(a_i^{(e)}+в_i^{(e)}x+c_i^{(e)}y\right)/\Delta_e,\qquad N_j^{(e)}\left(x,y\right)=\left(a_j^{(e)}+в_j^{(e)}x+c_j^{(e)}y\right)/\Delta_e,$$

$$N_k^{(e)}\left(x,y\right)=\left(a_k^{(e)}+в_k^{(e)}x+c_k^{(e)}y\right)/\Delta_e,$$

$$a_i^{(e)}=x_j\,y_k-x_k\,y_j,\qquad в_i^{(e)}=y_j-y_k,\qquad c_i^{(e)}=x_k-x_j,$$

$$a_j^{(e)}=x_k\,y_i-x_i\,y_k,\qquad в_j^{(e)}=y_k-y_i,\qquad c_j^{(e)}=x_i-x_k,$$

$$a_k^{(e)}=x_i\,y_j-x_j\,y_i,\qquad в_k^{(e)}=y_i-y_j,\qquad c_k^{(e)}=x_j-x_i,$$

Δ_e - площадь элемента *(e)*.

Суммируя равенство (10) по всем элементам, получаем для искомой функции разложение

$$h\left(x,y\right)\approx h_n\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}N_i\left(x,y\right)h_i \qquad (11)$$

Здесь n - число всех узлов сетки.

Подставляя в задаче (1), (2) вместо $h\left(x,y\right)$ функцию $h_n\left(x,y\right)$, по обобщенному принципу Галеркина получаем соотношения

$$\iint_D N_j\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)+q\,h_n-f\right]dx\,dy+\int_S N_j\left(T\frac{\partial h_n}{\partial n}+\quad h_n-\quad\right)ds=0\,,$$

$i=1,2,...,n$

Применяя к двойному интегралу первую формулу Грина, имеем равенства

$$\iint_D\left[T\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial h_n}{\partial x}+\frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)+q\,N_jh_n-N_jf\right]dx\,dy+\int_S N_j\left(\quad h_n-\quad\right)ds=0\,,$$

$j=1,2,...,n$

После подстановки вместо функции $h_n(x,y)$ ее разложения из (11) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно h_i

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\iint_D\left[T\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}+\frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)+qN_jN_i\right]h_i\,dx\,dy+\int_S N_iN_j\quad h_i\,ds\right\}=\iint_D N_j\,f\,dx\,dy+\int_S N_j\quad ds,$$

$i=1,2,...,n$

или

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ji}h_i=в_j,\ i=1,2,...,n, \qquad (12)$$

где

$$a_{ji}=\iint_D T\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}+\frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)dx\,dy+\iint_D N_jN_iq\,dx\,dy+\int_S N_jN_i\quad ds$$

$$в_j=\iint_D N_j\,f\,dx\,dy+\int_S N_i\quad ds$$

Матрица системы (12) симметричная и хорошо обусловленная с диагональным преобладанием, поэтому ее можно легко решить одним из точных или приближенных методов. Решив систему алгебраических уравнений (5), определяем значения $h^{(1)}(x_i,y_i)$ $(i=1,2,...,n)$. Подставляя в формуле (9) вместо $h^{(0)}$ значения $h_i^{(1)}$, находим следующее приближение $h_i^{(2)}$ и т.д. Итерационный процесс продолжим до выполнения условия

$$\max_i\left|h_i^{(\ )}-h_i^{(\ -1)}\right|<\quad ,\quad =1,2,...$$

где - номер итерации.

Работа алгоритма апробирована на решении следующего тестового примера. В центре круговой области радиуса $r=3000\,м$ находится источник, благодаря которому поддерживается постоянный уровень $h_0=370\,м$, а уровень воды на границе области $-\ h_r=350\,м$. Исходные данные задачи: $h(x,y)=\sqrt{h_r^2+\Delta\left(r^2-x^2-y^2\right)}$; $k(x,y)=10\,xy/r^2+5$; $q(x,y)=1$; $f(x,y)=2\Delta\left(2k(x,y)-5\right)+q\cdot h(x,y)$; $(x,y)=-\Delta k r+\quad h_r$ для $x^2+y^2=r^2$, - произвольное число, $\Delta=16\cdot10^{-4}$. Рассмотрены четыре случая задания функции $\Phi(x,y)$:

1) $\Phi(x,y)=350м$;
2) $\Phi(x,y)=360м$;
3) $\Phi(x,y)=370м$;
4) $\Phi(x,y)=\left(h_r^2+\Delta\left(x^2+y^2\right)\right)^{1/2}$.

В Табл. 1 приведены значения уровней грунтовых вод $h(x,y)$ и управления $f(x,y)$ для указанных случаев на расстоянии $r_0=0\,м$; $r_1=1000\,м$; $r_2=2000\,м$; $r_3=3000\,м$ от центра круга, полученные описанным алгоритмом.

Табл. 1

Расстояние от центра области, м		0	1000	2000	3000
Начальные уровни грунтовых вод, м		370	367,83	361,25	350
Начальные значения инфильтрации, м/сут		0,2	0,2	0,2	0,2
$\Phi(x,y)=350м$	$h(x,y)$, м	350,81	350,56	350,10	350,00
	$f(x,y)$, м/сут	-0,1476	0,0328	0,0100	-0,0024
$\Phi(x,y)=360м$	$h(x,y)$, м	360,55	360,38	359,87	359,61
	$f(x,y)$, м/сут	-0,0890	0,0164	-0,0086	0,0500
$\Phi(x,y)=370м$	$h(x,y)$, м	370,29	370,18	369,63	369,22
	$f(x,y)$, м/сут	-0,0304	0,0000	-0,0271	0,1026
	$\Phi(x,y)$, м	370	367,83	361,25	350
	$h(x,y)$, м	369,80	367,96	361,21	349,88
	$f(x,y)$, м/сут	0,07	0,13	0,04	0,12

Список литературы

1. **Мурзакматов М. У., Шамырканов М. Б.** Задача оптимального управления уровнем грунтовых вод // Вестник Ысык-Кульского государственного университета. Каракол: Издательство ИГУ, 2008. № 21. С. 17-23.
2. **Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.** Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969. С. 414.
3. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. С. 392.

УДК 530.162

Валерий Леонидович Шилов
ОАО «АВТОСПЕЦОБОРУДОВАНИЕ», г. Великий Новгород

СООТНОШЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ©

Посредством альтернативной интерпретации известной экспериментальной базы показаны соотношения определённостей в квантовой механике.

Несмотря на беспрецедентно высокий уровень проверяемости и эффективности использования, современная квантовая механика оказалась в ситуации, аналогичной той, которая на заре науки имела место при объяснении чередования дня и ночи в полупериодах вращения Земли. Но, если тогда причинно-следственная связь оказалась только поставленной с ног на голову, то современная квантовая механика детерминизм исключила.

Современная квантовая механика не определяет понятие квантовой одновременности, тем более, каких-либо критериев её размерности.

Но, поскольку состояние квантовой системы (КС), прежде всего, обуславливается частотой её колебаний, напрашивается вывод о том, что именно ОДНОВРЕМЕННОСТЬ сосуществования альтернативных состояний свободно движущейся КС с размерностью в ПЕРИОД волновой функции КС является, фактически, основным, неформальным принципом современной квантовой механики, ее «элементарной клеточкой», которую Н. Бор отстаивал последовательно и безальтернативно.

ОДНОВРЕМЕННОСТЬ с размерностью в ПЕРИОД волновой функции КС породила ряд проблем, для объяснения которых пришлось принять дополнительные принципы, например, принцип суперпозиции состояний, призванный объяснять проявление одновременно сосуществующих альтернативных состояний КС свойствами инструмента регистрировать только одно из них.

Но, прежде всего, вышеуказанная одновременность породила некорректную аналогию в регистрации взаимно дополнительных величин - ВДВ (например, импульса и координаты) - у объектов с несопоставимыми формами движения: КС и макрообъекта, в составе которого КС проявляется уже по законам средних чисел.

НЕВОЗМОЖНОСТЬ классически ОДНОВРЕМЕННО и точно регистрировать у КС импульс и координату трактуется современной квантовой механикой как НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ состояния КС, что, естественно, согласуется с вышеуказанной трактовкой одновременности с размерностью в период волновой функции.

Принципиальная неопределённость ВДВ, как будет показано, не есть следствие применения классических понятий к описанию неклассических объектов, но есть следствие применения классических требований, подходов и одновременной - классической - формы определения ВДВ для неклассического объекта с неклассической формой самодвижения.

Известный эксперимент, где некоторые одиночные фотоны проходят через прозрачную пластину, а некоторые отражаются, позволил сделать основополагающий вывод современной квантовой теории: поскольку одинаковые частицы в одинаковых условиях могут вести себя по-разному, т.е. непредсказуемо, детерминизм исключается однозначно.

Вышеуказанный эксперимент, однако, позволяет сделать соответствующий вывод и для альтернативной теории квантовой механики: поскольку одинаковые фотоны, взаимодействуя с уникальным инструментом - пластиной, ведут себя по-разному, то эти фотоны подлетают и взаимодействуют с пластиной в альтернативных, и, как будет показано, в ритмично чередующихся состояниях после каждого полупериода своей волновой функции, что, в конечном счёте, исключает не детерминизм, но принцип суперпозиции состояний.

Таким образом, эксперименты с прозрачной пластиной показывают, что проявление альтернативных состояний обусловлено не принципом их суперпозиции, но сочетанием нижеследующих факторов на начало взаимодействия КС с пластиной: во-первых, формой проявления внутренне присущих всякому наблюдаемому объекту законов самодвижения - в нашем случае, ритмичным чередованием альтернативных состояний КС; во-вторых, уникальным свойством инструмента - пластины - качественно по разному, альтернативно реагировать на альтернативные состояния КС.