МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, СТРОИТЕЛЬСТВО, АРХИТЕКТУРА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.95

Валентина Михайловна Ипатова
Московский физико-технический институт

РАЗРЕШИМОСТЬ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11133).

Пусть S - двумерная сфера радиуса R_3, $\Phi\in\left[-\frac{}{2};\frac{}{2}\right]$ - широта, $\in[0,2\ )$ - долгота, Ω - угловая скорость вращения Земли, g - ускорение свободного падения, $l=2\Omega\sin$ - параметр Кориолиса, $\Delta=\frac{1}{R_3^2\cos^2}\frac{\partial^2}{\partial\ ^2}+\frac{1}{R_3^2\cos}\frac{\partial}{\partial}\left(\cos\ \frac{\partial}{\partial}\right)$ - оператор Лапласа-Бельтрами, $J(u,v)=\frac{1}{R_3^2\cos}\left(\frac{\partial u}{\partial}\frac{\partial v}{\partial}-\frac{\partial v}{\partial}\frac{\partial u}{\partial}\right)$ - якобиан, $_n=n(n+1)$ - собственные значения $(-\Delta)$, отвечающие собственным функциям $w_{mn}=w_{mn}(\ ,\ )$, $|m|\le n$, где $w_{mn}=Y_{mn}(\ ,\ )$ - сферические гармоники.

Обозначим через $L_2^0=L_2^0(S)$ действительное гильбертово пространство

$$L_2^0=\left\{u(\ ,\ )\in L_2(S),\int_S udS=0\right\}$$

со скалярным произведением $(u,v)=\int_S uvdS$ и нормой $\|u\|=(u,u)^{1/2}$. С оператором $(-\Delta)$ свяжем шкалу гильбертовых пространств $H\ =H\ (S)$, $\in\mathrm{R}$, полагая

$$H\ =\left\{u(\ ,\ ):\|u\|\ =\|(-\Delta)^{\ /2}u\|<+\infty,\int_S udS=0\right\}$$

В дальнейшем нам понадобятся неравенства

1) $\|u\|\ \ge 2^{(\ -\ )/2}\|u\|\ ,\quad\ >\ ,\quad u\in H\ ;$

2) $2\|u\|^2\le\|u\|_1^2,\quad u\in H^1;$

3) $\|u\|_{L_4(S)}\le 2^{1/4}\|u\|^{1/2}\|u\|_1^{1/2},\quad u\in H^1.$

Для вектор-функций $u=(u_1,u_2)$ высоты два введем пространства $V\ =V\ (S)=H\ \times H$ с нормой $\|u\|\ =\left(\|u_1\|^2\ +\|u_2\|^2\right)^{1/2}$, где $V_0=L_2^0\times L_2^0$, $\|u\|_0\equiv\|u\|$. $V^{'}\ =V_{-}$ - сопряженное с V пространство при отождествлении V_0 со своим сопряженным.

В [1] приводится следующее описание двухслойной квазигеострофической модели общей циркуляции атмосферы. Рассмотрим уравнения бароклинной атмосферы в p-системе координат:

$$\frac{du}{dt}-lv=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial p}\ \frac{\partial u}{\partial p}+\ \Delta u,\quad \frac{dv}{dt}+lu=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial p}\ \frac{\partial v}{\partial p}+\ \Delta v,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p}=-\frac{RT}{p},\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}=0,\quad \frac{dT}{dt}=\frac{RT}{pc_p}\ +\frac{\partial}{\partial p}\ _1\frac{\partial T}{\partial p}+\ _1\Delta T+\frac{}{c_p},$$

где $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+\ \frac{\partial}{\partial}$, или, если положить $T=T'+\overline{T}\left(p\right)$:

$$\frac{dT'}{dt}=\frac{R\overline{T}}{pg}\left(\Gamma_a-\Gamma\right)+\frac{\partial}{\partial p}\ _1\frac{\partial T}{\partial p}+\ \Delta T+\frac{}{c_p}.$$

Здесь T - температура, $u,v,$ - компоненты вектора скорости в p-системе координат, Φ - геопотенциал, Γ_a - сухоадиабатический градиент температуры, Γ - градиент стандартного распределения температуры в z-системе координат, c_p - удельная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении, - неадиабатические притоки тепла, R - газовая постоянная.

Первые два уравнения перепишем для вихря $\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, пренебрегая членами переноса по вертикали:

$$\frac{d}{dt}(\Omega + l) + (\Omega + l)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{dy}\right) = \frac{\partial}{\partial p} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \quad \Delta\Omega, \text{ или}$$

$$\frac{d}{dt}(\Omega + l) = (\Omega + l)\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \quad \Delta\Omega$$

Сделаем следующие упрощения. Будем считать, что $\Omega << l$ и $l = l_0 + l_1(\Phi)$, так что $l_1(\Phi) << l_0$. Введём геострофическую функцию тока $\Psi = \frac{\Phi'}{l_0}$ и геострофические скорости $u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$.

Уравнение для гидростатики перепишем следующим образом: $\frac{\partial \Psi}{\partial p} = -\frac{RT'}{pl_0}$.

Окончательно уравнение для Ω и T' запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi + J(\Psi, \Delta\Psi + l) = l_0\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \quad \frac{\partial}{\partial p}\Delta\Psi + \quad \Delta^2\Psi,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T' + J(\Psi, T') = \Gamma_0 \quad + \frac{\partial}{\partial p} \ _1\frac{\partial T}{\partial p} + \quad _1\Delta T' + \frac{}{c_p}, \qquad (1)$$

$$\Gamma_0 = \frac{R\overline{T}}{pg}(\Gamma_a - \overline{\Gamma}).$$

Будем использовать следующую вертикальную структуру сетки:

--------------- $p = 0$,

--------------- $p = 250$ мб $(1/2)$,

--------------- $p = 500$ мб (1),

--------------- $p = 750$ мб $(3/2)$,

--------------- $p = 1000$ мб.

В качестве краевых динамических условий примем $\quad = 0$ при $p = 0$ и $p = 1000$ мб,

$$\left.\frac{\partial \Omega}{\partial p}\right|_{p=0} = 0, \quad _1\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_{p=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \Omega}{\partial p}\right|_{p=1000} = -\Sigma_0\Omega_{1000} \approx -\Sigma_i\Omega_{750}, \quad \Sigma = c|\overline{u}|g \quad > 0, \quad _1\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_{p=1000} = -\Sigma(T - T_0).$$

Выпишем уравнения для $\Delta\Psi$ на уровнях $1/2$ и $3/2$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi_{1/2} + J(\Psi_{1/2}, \Delta\Psi_{1/2} + l) = l_0\frac{1}{\Delta p} + \quad \Delta^2\Psi_{1/2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi_{3/2} + J(\Psi_{3/2}, \Delta\Psi_{3/2} + l) = -l_0\frac{1}{\Delta p} - \frac{\Sigma_0}{\Delta p}\Delta\Psi_{3/2} + \quad \Delta^2\Psi_{3/2}. \qquad (2)$$

Уравнение для температуры выпишем для слоя (1):

$$\partial t\frac{\partial T_1'}{\partial t} + J(\Psi_1, T_1') = \Gamma_0 \ _1 + \quad _1\Delta T_1' - \frac{1}{2\Delta p}\cdot\left.\frac{\partial T'}{\partial p}\right|_{1000} + \frac{1}{c_p},$$

$$_1\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_{1000} = -\Sigma_1(T_1 - T_0) = -\Sigma_1(T_1' + \overline{T}_1 - T_0) = -\Sigma_1 T_1' + \Sigma_1(T_0 - \overline{T}_1).$$

Окончательно имеем

$$\frac{\partial T_1'}{\partial t} + J(\Psi_1, T_1') = \Gamma_0 \ _1 + \quad _1\Delta T_1' - \Sigma_1 T_1' + \Sigma_1(T_0 - \overline{T}_1) + \frac{1}{c_p}, \text{ где } \Sigma_1 = \frac{\Sigma_1}{2\Delta p}.$$

Введём теперь бароклинную и баротропную компоненты относительной завихренности $u_1 = \frac{\Psi_{1/2} + \Psi_{3/2}}{2}$, $u_2 = \frac{\Psi_{3/2} - \Psi_{1/2}}{2}$. Полагая $\frac{\Sigma}{2} = \frac{\Sigma_0}{2\Delta p}$, получим

$$\frac{\partial \Delta u_1}{\partial t} + J\left(u_1, \Delta u_1 + l\right) + J\left(u_2, \Delta u_2\right) = \quad \Delta^2 u_1 - \frac{\Sigma}{2}\Delta\left(u_1 + u_2\right),$$
$$\frac{\partial \Delta u_2}{\partial t} + J\left(u_1, \Delta u_2\right) + J\left(u_2, \Delta u_1 + l\right) = \quad \Delta^2 u_2 - \frac{\Sigma}{2}\Delta\left(u_1 + u_2\right) - \frac{{}_1 l_0}{\Delta p}.$$

Подставим теперь в уравнение для температуры её выражение через Ψ:

$$T_1' = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial p}\cdot\frac{p_1 l_0}{R} = -\frac{\Psi_{3/2} - \Psi_{1/2}}{\Delta p}\cdot\frac{p_1 l_0}{R} = -u_2\cdot\frac{p_1 l_0}{Rp\Delta}.$$

Получим

$$-\frac{p_1 l_0}{R\Delta p}\cdot\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + J\left(u_1, u_2\right)\right) = \Gamma_0\ {}_1 + \ {}_1\left(-\frac{p_1 l_0}{R\Delta p}\right)\Delta u_2 - \Sigma_1\left(-\frac{p_1 l_0}{R\Delta p}\right)u_2 + f_1,\quad f_1 \equiv \Sigma_1\left(T_0 - \bar{T}_1\right) + \frac{}{c_p},$$

или $\frac{\partial u_2}{\partial t} + J\left(u_1, u_2\right) = -\frac{R\Delta p\Gamma_0}{p_1 l_0}\cdot\ {}_1 + \ {}_1\Delta u_2 - \Sigma_1 u_2 - f$, $f = \frac{R\Delta p}{p_1 l_0}\cdot f_1$.

Обозначим $\frac{R\Delta p\Gamma_0}{p_1 l_0} = a$ и $\frac{1}{a}\frac{l_0}{\Delta p} = \ ^2$. Тогда окончательно получим систему уравнений, исключив ${}_1$ из уравнения для u_2:

$$\frac{\partial \Delta u_1}{\partial t} + J\left(u_1, \Delta u_1 + l\right) + J\left(u_2, \Delta u_2\right) = \quad \Delta^2 u_1 - \frac{\Sigma}{2}\Delta\left(u_1 + u_2\right),$$
$$\frac{\partial \Delta u_2}{\partial t} + J\left(u_1, \Delta u_2\right) + J\left(u_2, \Delta u_1 + l\right) = \tag{3}$$
$$= \quad \Delta^2 u_2 - \frac{\Sigma}{2}\Delta\left(u_1 + u_2\right) + \ ^2\left[\frac{\partial u_2}{\partial t} + J\left(u_1, u_2\right) - \ {}_1\Delta u_2 + \Sigma_1 u_2 + f\right].$$

В дальнейшем мы будем рассматривать эту модель в сферической системе координат, обозначая $^2\ {}_1$ через ${}_1$, $^2\Sigma_1$ через Σ_1, $^2 f$ через f. Все параметры Σ, $\ ,\Sigma_1$, ${}_1$, ^{2}, входящие в (3), положительны и имеют следующие размерности: $[\Sigma] = t^{-1}$, $[\ ] = L^2 t^{-1}$, $[\Sigma_1] = t^{-1}L^2$, $[\ {}_1] = t^{-1}$, $[\ ^2] = L^{-2}$. Систему (3) удобно записать в векторно-матричном виде, вводя матрицы-операторы A_1, A_2 и векторы l_1, l_2 и F:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta - \ ^2 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} - \ \Delta^2 + \frac{\Sigma}{2}\Delta & \frac{\Sigma}{2}\Delta \\ \frac{\Sigma}{2}\Delta & - \ \Delta^2 + \left(\frac{\Sigma}{2} + \ {}_1\right)\Delta - \Sigma_1 \end{pmatrix},$$
$$l_1(u) = \begin{pmatrix} J\left(u_1, l\right) \\ J\left(u_2, l\right) \end{pmatrix},\quad l_2(u) = \begin{pmatrix} J\left(u_1, \Delta u_1\right) + J\left(u_2, \Delta u_2\right) \\ J\left(u_1, \Delta u_1\right) + J\left(u_2, \Delta u_1\right) - \ ^2 J\left(u_1, u_2\right) \end{pmatrix}, \tag{4}$$
$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Учитывая (4), систему (3) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}A_1 u + A_2 u + l_1(u) + l_2(u) = F,\quad u\big|_{t=0} = u_0. \tag{5}$$

Пусть $T > 0$ - некоторый момент времени, введём пространства

$X = L_2\left(0, T; V_3\right)$, $Y = L_2\left(0, T; V_2\right)$, $Y_1 = L_2\left(0, T; V_1\right)$, $Z = L_2\left(0, T; V_1'\right)$,

$$W = \left\{u \in X, \frac{\partial u}{\partial t} \in Y_1\right\}.$$

В дальнейшем нам понадобятся неравенство Коши

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\quad \forall \ > 0,\quad \forall a, b \in \mathrm{R},$$

неравенство Юнга

$$ab \le \frac{1}{p}\ ^p a^p + \frac{p-1}{p}\ ^{-p/(p-1)} b^{p/(p-1)}\quad \forall \ > 0,\quad \forall p > 1,\quad \forall a, b \ge 0,$$

а также следующие утверждения [2]:

Лемма 1 (Гронуолла). *Если* $A = const$, $\Phi(t) \ge 0$, $B(t) \ge 0$, $B(t) \in L_1(0,T)$ *и* $\Phi(t) \le A + \int\limits_0^t B(p)\Phi(p)dp$, *то верно неравенство* $\Phi(t) \le A\exp\left(\int\limits_0^t B(p)dp\right)$.

Лемма 2 (о компактности). *Пусть* B_0, B_1, B_2 *- три банаховых пространства, причём* $B_0 \subset B_1 \subset B_2$, B_k, $k = 0, 2$, *рефлексивны,* B_0 *компактно вложено в* B_1, *а* B_1 *непрерывно вложено в* B_2, *и пусть*

$W = \left\{ u : u \in L_{p_0}(0,T;B_0),\ \ \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p_1}(0,T;B_2) \right\}$, *где* T *конечно и* $1 < p_k < \infty$, $k = 0,1$. *Тогда вложение* W *в* $L_{p_0}(0,T;B_1)$ *компактно.*

Будем обозначать через c различные положительные постоянные.

Теорема 1. *Для решения задачи (5) верны априорные оценки*

$$\max_{0\le t\le T} \| u(t) \|_1 + \| u \|_Y \le c\left(\| u_0 \|_1 + \| F \|_Z\right), \tag{6}$$

$$\max_{0\le t\le T} \| u(t) \|_2 + \| u \|_X \le c\left(\| u_0 \|_2 + \| F \|_Z\right),\ \ \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{Y_1} \le c_1, \tag{7}$$

где c_1 *зависит от* $\| u_0 \|_2$ *и* $\| F \|_Z$.

Доказательство. Умножая (5) на u скалярно в V_0 и учитывая равенство $\left(J(u_2,\Delta u_2),u_1\right) + \left(J(u_1,\Delta u_2),u_2\right) = 0$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| u \|_1^2 + \ ^2 \| u_2 \|^2 \right) + \ \ \| u \|_2^2 + \frac{\Sigma}{2} \| u_1 + u_2 \|_1^2 + \ _1 \| u_2 \|_1^2 + \Sigma_1 \| u_2 \|^2 = -\left(f, u_2 \right) \le \| f \|_{-1} \| u \|_1 \le \frac{\Sigma}{2} \| u \|_1^2 + c \| f \|_{-1}^2 .$$

По лемме Гронуолла получаем (6).

Умножим теперь (5) на Δu скалярно в V_0. Учитывая равенство

$\left(J(u_2,\Delta u_2),\Delta u_1\right) + \left(J(u_2,\Delta u_1),\Delta u_2\right) = 0$, находим, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| u \|_2^2 + \ ^2 \| u_2 \|_1^2 \right) + \ \ \| u \|_3^2 + \frac{\Sigma}{2} \| u_1 + u_2 \|_2^2 + \ _1 \| u_2 \|_2^2 + \Sigma_1 \| u_2 \|_1^2 =$$

$$= \left(f, \Delta u_2 \right) - \left(J(u_1, l), \Delta u_1 \right) - \left(J(u_2, l), \Delta u_2 \right) \le \| f \|_{-1} \| u \|_3 + c \| u \|_1 \| u \|_2 \le \frac{\ }{2} \| u \|_3^2 + c\left(\| f \|_{-1}^2 + \| u \|_1^2 \right).$$

Применяя лемму Гронуолла, убеждаемся в справедливости первого неравенства (7). Умножая (5) на $\frac{\partial u}{\partial t}$ скалярно в V_0, используя (6) и первое неравенство (7), приходим ко второму неравенству (7).

Теорема 2. *При всех* $u \in V_2$ *и* $F \in Z$ *задача (5) имеет единственное решение* $u \in W$.

Доказательство. Для построения решения воспользуемся методом Бубнова-Галёркина. Пусть Q_k есть линейная оболочка собственных векторов $w_{mn}, | m | \le n, n = 1,\dots,k$, и $Q^k = Q_k \times Q_k$. Будем искать приближённое решение $u^k = \left(u_1^k, u_2^k\right)$ в виде $u_j^k = \sum\limits_{n=1}^{k} \sum\limits_{m=-n}^{n} r_{j,mn}^k(t) w_{mn}(\ \ ,\Phi)$, $j = 1, 2$. Неизвестные функции времени находятся из системы

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} A_1 u^k + A_2 u^k + l_1\left(u^k\right) + l_2\left(u^k\right), v \right) = \left(F, v\right), \\ &\left(u^k, v\right)\Big|_{t=0} = \left(u_0, v\right) \quad \forall v \in Q^k. \end{aligned} \tag{8}$$

Повторяя рассуждения теоремы 1, убеждаемся, что для приближённого решения верны оценки, аналогичные (6)-(7). Выделим из последовательности приближённых решений сходящуюся подпоследовательность (за которой сохраним прежнее обозначение): $u^k \to u$ слабо в W и сильно в $L_2(0,T;V_p)$ при $p < 3$. Переходя в (8) к пределу при $k \to \infty$, находим, что u является решением задачи (5).

Пусть u и U - какие-либо два решения задачи (5). Для разности $z = U - u$ имеем

$$\frac{\partial \Delta z_1}{\partial t} + J\left(z_1, \Delta U_1 + l\right) + J\left(u_1, \Delta z_1\right) + J\left(z_2, \Delta U_2\right) + J\left(u_2, \Delta z_2\right) + \frac{\Sigma}{2}\Delta\left(z_1 + z_2\right) - \ \ \Delta^2 z_1 = 0, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\left(\Delta z_2 - \ ^2 z_2\right)}{\partial t} + J\left(z_1, \Delta U_2\right) + J\left(u_1, \Delta z_2\right) + J\left(z_2, \Delta U_1 + l\right) + J\left(u_2, \Delta z_1\right) + \\ &+ \frac{\Sigma}{2}\Delta\left(z_1 + z_2\right) - \ \ \Delta^2 z_2 + \ _1 \Delta z_2 - \Sigma_1 z_2 = \ ^2\left[J\left(z_1, U_2\right) + J\left(u_1, z_2\right) \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Умножая (9) на z_1 и (10) на z_2 скалярно в L_2^0 и суммируя результаты, получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| z \|_1^2 + \ {}^2 \| z_2 \|^2\right) + \ \| z \|_2^2 + \frac{\Sigma}{2} \| z_1 + z_2 \|_1^2 + \ {}_1 \| z_2 \|_1^2 + \Sigma_1 \| z_2 \|^2 =$$
$$= \left(J(z_1,u_1) + J(z_2,u_2), \Delta z_1\right) + \left(J(z_1,u_2) + J(z_2,u_1), \Delta z_2\right) - \ {}^2 \left(J(z_1,u_2), \ z_2\right). \tag{11}$$

Оценим характерные нелинейные члены в правой части (11):

$$|\left(J(z_1,u_1), \Delta z_1\right)| \le \| \nabla z_1 \|_{L_4(S)} \| \nabla u_1 \|_{L_4(S)} \| z_1 \|_2 \le c \| z_1 \|_1^{1/2} \| z_1 \|_2^{3/2} \| u \|_2 \le \frac{}{2} \| z_1 \|_2^2 + c \| z_1 \|_1^2 \| u \|_2^4,$$

$$|\left(J(z_1,u_2), z_2\right)| \le \| z_1 \|_1 \| \nabla u_2 \|_{L_4(S)} \| z_2 \|_{L_4(S)} \le c \| z_1 \|_1^2 \| u \|_2 .$$

Таким образом, из (11) вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(\| z \|_1^2 + \ {}^2 \| z_2 \|^2\right) \le c \| z \|_1^2 \left(\| u \|_2^4 + \| u \|_2\right).$$

Используя лемму Гронуолла, заключаем, что $z = 0$.

Список литературы

1. **Дымников В. П., Филатов А. Н.** Основы математической теории климата. М.: ВИНИТИ, 1994.
2. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

УДК 532.5

Валентина Михайловна Ипатова, Дмитрий Евгеньевич Ипатов
Московский физико-технический институт

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ ОКЕАНА©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11133) и РФФИ (проект 09-01-00284-а).

Будем рассматривать прямоугольную область $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$, Γ - граница Ω, z - вертикальная координата, направленная вниз, $0 \le z \le H$, $H > 0$ - средняя глубина океана, $G = \Omega \times (0, H)$ - трехмерная область, $\Sigma = \Gamma \times [0, H]$ - боковая граница G, t - временная переменная, $t \in [0, \mathrm{T}]$, где $0 < \mathrm{T} < +\infty$, $G_t = G \times (0, \mathrm{T})$, $D = \Omega \times (0, \mathrm{T})$. Вектор скорости воды записывается в форме $U = (u, v, w)^{\circ} (u, w)$, где $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$, $w = \dot{z}$.

Введем дифференциальные операторы:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \ \mathrm{div}\ \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad A_{\Phi} = - \ {}_{\Phi} \Delta - \ \frac{\partial^2}{{}_{\Phi}\, \partial z^2}, \quad A_u = A_v = A,$$

где под Φ понимаются компоненты скорости u, v, температура T и соленость S; ${}_{\Phi}$, ${}_{\Phi}$ - положительные постоянные, ${}_u = {}_v =$, ${}_u = {}_v =$.

Через $l = const$ обозначается параметр Кориолиса, $B = \begin{pmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{pmatrix}$.

В области G_t рассмотрим систему уравнений гидротермодинамики океана в виде [5]:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (A + B)\mathbf{u} + g \nabla \ + \frac{g}{\ _0} \nabla \int_0^z \ dz' = 0, \tag{1}$$
