Данный подход может быть применён для точного аналитического решения квазистационарной задачи о намораживании на внутренней сферической поверхности (Рис. 1б). Опуская математические выкладки, приведём лишь конечную зависимость:

$$\tau_{\text{н}} = \frac{\rho r}{\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}}-t_{\text{кр}})} \times \tag{30}$$

$$\times \left(\xi - \frac{2(t_{\text{кр}}-t_0)\sqrt{\lambda_1 r_0 (r_0+R)}}{\sqrt{-\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}}-t_{\text{кр}})\begin{pmatrix} \alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} r_0^2 \lambda_1 + \alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} R r_0 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} r_0^2 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} R r_0 \lambda_1 - \\ -4 t_{\text{кр}} r_0 \lambda_1 + 4 r_0 \lambda_1 t_0 + 4 t_{\text{кр}} R \lambda + 4 \lambda_1 t_0 R - 4 t_0 R \lambda - 4 t_{\text{кр}} \lambda_1 R \end{pmatrix}}} \times \right.$$

$$\times \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{(2 r_0 \lambda_1 \xi - 2 R \lambda \xi - r_0 \lambda_1 R + 2 \lambda R r_0 + 2 \xi \lambda_1 R - r_0^2 \lambda_1)\sqrt{\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}}-t_{\text{кр}})}}{\sqrt{-r_0 \lambda_1 (r_0+R)\begin{pmatrix} \alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} r_0^2 \lambda_1 + \alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} R r_0 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} r_0^2 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} R r_0 \lambda_1 - \\ -4 t_{\text{кр}} r_0 \lambda_1 + 4 r_0 \lambda_1 t_0 + 4 t_{\text{кр}} R \lambda + 4 \lambda_1 t_0 R - 4 t_0 R \lambda - 4 t_{\text{кр}} \lambda_1 R \end{pmatrix}}} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{arctg} \left(\frac{(\lambda_1 \mathrm{R} - 2 R \lambda + r_0 \lambda_1)\sqrt{\alpha_{\text{ж}}(t_{\text{ж}}-t_{\text{кр}}) r_0}}{\sqrt{-\lambda_1 (r_0+R)\begin{pmatrix} \alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} r_0^2 \lambda_1 + \alpha_{\text{ж}} t_{\text{ж}} R r_0 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} r_0^2 \lambda_1 - \alpha_{\text{ж}} t_{\text{кр}} R r_0 \lambda_1 - \\ -4 t_{\text{кр}} r_0 \lambda_1 + 4 r_0 \lambda_1 t_0 + 4 t_{\text{кр}} R \lambda + 4 \lambda_1 t_0 R - 4 t_0 R \lambda - 4 t_{\text{кр}} \lambda_1 R \end{pmatrix}}} \right) \right] \right)$$

В работе [Там же] показано, что при прочих равных условиях толщина намороженного слоя больше на цилиндрической поверхности, чем на плоской.

Сравнительные расчёты по полученному в исследовании решении показывают, что при прочих равных условиях толщина намороженного слоя на внешней сферической поверхности больше, чем для плоской и цилиндрической (внешней) поверхностях; иными словами, время намораживания наперёд заданной толщины намороженного слоя для сферической поверхности будет меньшим.

При намораживании на внутренней сферической поверхности вышеуказанная толщина будет больше чем на внешней при прочих равных условиях.

Аналогичным образом были получены точные аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании на внешней и внутренней сферической поверхности, когда на внутренней поверхности имеет место граничное условие третьего рода, однако, решение и окончательные выражения для зависимости времени намораживания слоя определённой толщины очень громоздки и выходят за рамки данной статьи, что связано с необходимостью детерминирования не одной, а двух температур на границах. Эти решения переходят в решения, полученные в данной работе, при условии $t_{\text{п}} = t_0$; $\alpha_0 \to \infty$ ($t_{\text{п}}$ - температура стенки со стороны холодильного агента), что является дополнительным доказательством их правильности.

Основные выводы

В рамках данной работы получено точное аналитическое решение квазистационарной задачи о намораживании на внешней и внутренней сферической поверхности с граничными условиями первого рода на внутренней поверхности и граничными условиями третьего рода на внешней поверхности.

Список литературы

1. **Барабанные морозильные аппараты** / Н. В. Фомин, Б. М. Менин, В. Б. Ржевская, Э. И. Гуйго. Л.: Машиностроение (Ленинградское отделение), 1986. 160 с.
2. **Задача о промерзании жидкости, натекающей на плоскую стенку** / М. А. Макаров, В. А. Леонов, В. И. Дубовик, Г. Н. Шведова // Инженерно-физический журнал. 1971. Т. XXI. № 3. С. 537-546.
3. **Юшков П. П., Гейнц Р. Г.** О продолжительности промерзания пластины // Инженерно-физический журнал. 1967. Т. XIV. № 4. С. 460-464.
4. **Plank R.** Die Gefriedanen von Eisblocken // Zeitschrift für die gesamte Kälte Industrie. 1-13. № 6. S. 110-114.
5. **Stefan I.** Über die Theorie der Eisbilding, insbesondere über die Eisbilding im Polarmeere // Math. Naturw. 1889. Bd. 98. № 11a. S. 965-983.
6. **Stefan I.** Über einige Probleme der Theorie der Wärmeleitungssitzungsber // Math. Naturw. 1889. Bd. 98. № 11a. S. 473-484.

УДК 51-7

Елена Владимировна Назарова
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ©

В работе [1] рассматривается задача о выборе оптимального дневного набора продуктов по витаминному составу при определенном суточном бюджете.

В этой работе задача решается путем оптимизации функции полезности вида

$$\Pi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \; {}_0\left(\beta_i x_i^{\gamma_i}\right).$$

Здесь x_i - количество *i*-го товара, $x_i>0$; $\gamma_i=\dfrac{\ln 2}{\ln(x^{**})-\ln(x^{**i})}$, $\beta_i=(x^{*})^{-\gamma_i}$; $f_0(x)\equiv 1-x^{-a_0}$, $a_0=\dfrac{2}{\lg 2}$ - базовая функция полезности (Рис. 1).

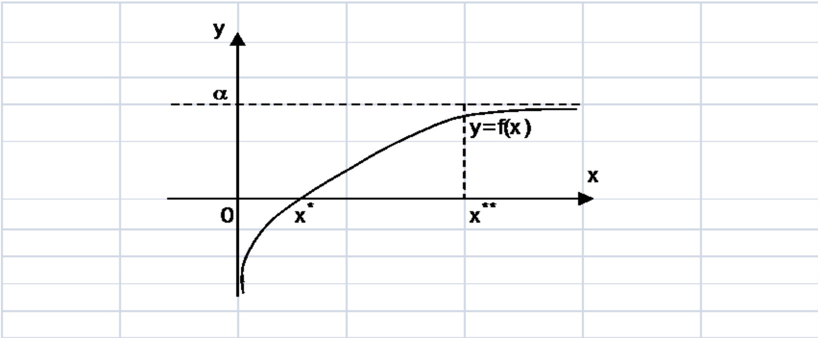

Рис. 1. *График базовой функции*

Эта функция определяется двумя значениями x^{*} и x^{**}, зависящими от суточной потребности организма человека в рассматриваемом витамине.

Поскольку увеличение потребления витаминов сверх суточной нормы не ведет к увеличению полезности для организма человека и в [Там же] данный факт не был учтен, в данной статье была поставлена задача о построении функции полезности, учитывающей уменьшение полезности при превышении нормы содержания витаминов в потребляемых продуктах.

Пусть потребитель приобретает n видов товаров за единицу времени, p_i - цена товара i-го вида, $p_i>0$; имеется z рублей в единицу времени на приобретение товаров. В результате

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le z, \quad z>0 \tag{1}$$

В течение дня потребитель закупает продукты питания $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые содержат витамины $v_1, v_2, \ldots, v_n$, причем в одном грамме s-го продукта содержится $\alpha_s^{(i)}$ граммов витаминов i-го вида. Тогда получаем количество витаминов i-го вида, содержащегося во всех закупленных продуктах $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$v_i=\sum_{s=1}^{n}\alpha_s^{(i)} x_s \tag{2}$$

Для достижения поставленной цели мы составили композицию функций, которая обеспечивала бы максимальную полезность (максимальное значение функции $\Pi(x)$) в середине суточной нормы потребления витаминов. Для этого ввели функцию *g(x)* следующего вида:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-a_i)^2}{2\sigma}}, \tag{3}$$

где a_i - среднесуточная норма потребления i-го витамина:

$$a_i=\frac{x_{\max}^{i}-x_{\min}^{i}}{2} \tag{4}$$

Получили функцию полезности следующего вида:

$$\Pi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \; {}_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \quad {}^{-\frac{(\sum_{s=1}^{n}a_i^s x_s-a_i)^2}{2\sigma}}\right) \tag{5}$$

Отметим, что α_i отражают предпочтения потребителя в определенных витаминах. В данной статье рассматривается случай равной полезности витаминов, т.е. $\alpha_i=const, i=1,2,\ldots,n$.

Изучим поведение потребителя, который намеревается в течение дня закупить товары в количестве x_i, $i=1,2,\ldots,n$, по цене p_i. На закупку товаров потребитель выделяет z рублей. Указанные величины должны быть связаны соотношением (1). Очевидно, что на сумму z товары могут быть приобретены неоднозначно.

Поэтому из всех вариантов закупок потребитель должен выбрать наилучший. При наличии функции полезности $\Pi(\vec{x})$ поставим задачу об оптимальном приобретении товаров.

$$\Pi(\vec{x}) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = z, \quad \vec{x} \in \mathrm{R}_{+}^{n} \tag{6}$$

Требуется найти вектор $\vec{x} = \vec{x}^* \in \mathrm{R}_{+}^{n}$, для которого $\Pi(\vec{x}^*) = \max\limits_{\vec{x} \in R_{+}^{n}} \Pi(\vec{x})$ и выполнено условие (1).

Решение ищем с помощью функции Лагранжа вида

$$L(x,\lambda) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{-a} \left(\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{a}{2\sigma}(a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots + a_i^n x_n - a_i)^2}\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - z\right),$$

решая систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_s} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^{-a} \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{a}{2\sigma}(a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots + a_i^n x_n - a_i)^2} \frac{a}{\sigma}(a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \ldots + a_i^n x_n - a_i) a_i^s\right) - \lambda p_s = 0, \; s = 1,2,\ldots,n;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n - z = 0$$

численно в пакете *Maple*.

Задача может быть решена для любого конечного числа переменных. Для примера рассмотрен случай восьми переменных для условного суточного бюджета z = 50 руб. По данным [2]:

Таблица 1. *Суточные дозы потребления витаминов (для взрослых здоровых лиц)*

Витамин, v_i	$x_{\min}^i$	$x_{\max}^i$	$a_i = \frac{x_{\max}^i - x_{\min}^i}{2}$
А, ретинол, мг	0,99	1,5	1,245
В1, тиамин, мг	1,1	2,4	1,75
В2, рибофлавин, мг	1,2	3	2,1
В5, пантотеновая к-та, мг	4	12	8
В6 , пиридоксин, мг	1,5	2,8	2,15
В9, фолиевая кислота, мг	0,18	0,4	0,29
В12, цианкобаламин, мг	0,002	0,003	0,0025
D, кальциферолы, мг	0,01	0,025	0,0175

Таблица 2. *Содержание витаминов в пищевых продуктах (в 100 г продукта)*

Продукты	А, мг	В1, мг	В2, мг	В5, мг	В6, мг	В9, мкг	В12, мкг	D, мкг
Молоко коровье	0,025	0,04	0,15	0,38	0,05	5	0,4	0,05
Молоко сухое	0,13	0,27	1,3	2,7	0,2	30	3	0,25
Творог жирный	0,1	0,05	0,3	0,28	0,11	35	1	-
Яйцо куриное	1,26	0,18	0,24	3,8	0,37	19	2	7,7
Говядина	-	0,06	0,15	0,5	0,37	8,4	2,6	-
Крупа овсяная	-	0,49	0,11	0,9	0,27	29	-	-
Крупа рисовая	-	0,08	0,04	0,4	0,18	19	-	-
Макаронные изделия	-	0,17	0,04	0,3	0,16	20	-	-

Таблица 3. *Средняя цена за 1 кг продукта*

Продукты	p_i, руб.
Молоко коровье, x_1	30
Молоко сухое, x_2	70
Творог жирный, x_3	90
Яйцо куриное, x_4	100
Говядина, x_5	200
Крупа овсяная, x_6	20
Крупа рисовая, x_7	25
Макаронные изделия, x_8	50

получено следующее соотношение продуктов для достижения наилучшего содержания витаминов при заданном z:

$$x_1 = 0\ (г),\ x_2 = 47\ (г),\ x_3 = 279{,}7\ (г),\ x_4 = 61\ (г),\ x_5 = 0\ (г),\ x_6 = 205\ (г),\ x_7 = 449\ (г),\ x_8 = 0\ (г).$$

Данный подход к решению задач может быть интересен как для рядового потребителя, так и для врачей-диетологов.

Список литературы

1. **Большая медицинская энциклопедия.** М.: Директмедиа, 2006.
2. **Ерофеенко В. Т., Козловская И. С.** Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. М.: УРСС, 2004. 248 с.

УДК 629.12

Михаил Константинович Романченко, Иван Владимирович Сырмолотов,
Семён Юрьевич Карайван, Алексей Антонович Новиков, Евгений Васильевич Никулин
Новосибирский техникум автосервиса и дорожного хозяйства

О ВОЗДЕЙСТВИИ ВИБРАЦИИ НА ЧЕЛОВЕКА©

В настоящее время проводятся обширные исследования воздействия вибрации транспорта на пассажиров [2]. Органы, непосредственно воспринимающие вибрации, делятся на две группы. К первой относятся органы равновесия (вестибулярный аппарат), находящиеся во внутреннем ухе. Взаимодействуя с соответствующими связями в мозгу, они работают как интегральный измеритель угловых и линейных ускорений. Информация, посылаемая в мозг органами равновесия, находящимися под влиянием вибраций, может оказаться искаженной, дезориентирующей, а в некоторых случаях раздражающей и вызывающей у человека состояние болезни. Силы и перемещения, вызываемые вибрацией, улавливаются большим числом механических рецепторов во всем организме. Некоторые из них, находящиеся в мышцах и сухожилиях, сигнализируют о положении тела и действующих на него нагрузках. Они взаимодействуют с отделом центральной нервной системы, регулирующим положение тела и его движение. Эти рецепторы реагируют на любые изменения, в том числе низкочастотные.

Ко второй группе относятся рецепторы, расположенные в коже и соединительных тканях. Они выполняют функции осязания, реагируя на более высокие частоты (около 30 Гц). Вибрации оказывают определенное влияние на организм также через органы зрения и слуха.

При передаче вибраций от места приложения к рецепторам одни частоты усиливаются, а другие ослабляются. На Рис. 1 приведена кривая изменения в функции частоты показателя $q = A_1/A_2$ в системе голова - таз.

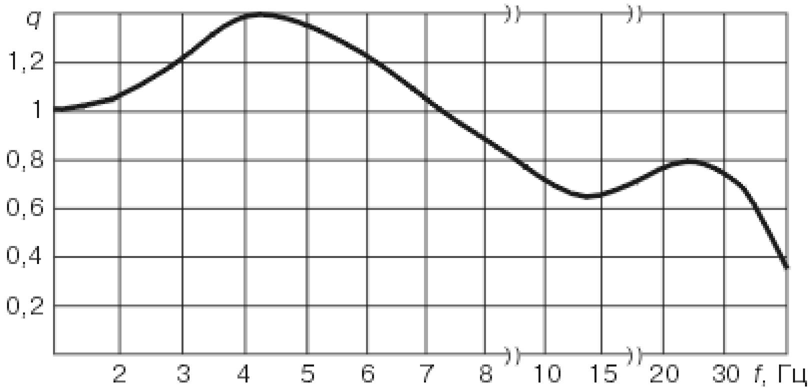

Рис. 1. *Изменение коэффициента q в функции частоты вибраций f*

Здесь A_1 и A_2 - амплитуды вертикальных вибраций тела на уровне головы и сиденья. Из рисунка видно, что на частоте 4 Гц показатель q=1,4. Это значит, что амплитуда вибраций на уровне головы на 40% больше, чем на уровне сиденья. После прекращения воздействия вибраций на организм он возвращается в нормальное состояние тем дольше, чем интенсивнее было воздействие вибраций [1].

Критерии и методика оценки влияния вибраций проводится по следующим параметрам:

- среднеквадратичное ускорение и амплитуда синусоидальных вибраций;