g нами определены: она должна быть не хуже 10^{-9} 1/год, для чего необходимы чувствительность ***гравиметра*** (прибора, измеряющего величину g) не хуже 1 мкГал и стабильность его примерно в 1 мкГал/год.

Один из лучших, наиболее чувствительных приборов для измерения величины g ***- гравиметр ГАБЛ, разработанный в Институте автоматики и электрометрии СО РАН***, позволяет измерять g с погрешностью ± 8 мкГал. По мнению разработчиков ***ГАБЛа***, принципиально возможно повысить чувствительность и стабильность прибора на порядок, что открывает перспективу использования его при решении ***геодинамической*** задачи - наблюдения за вариацией во времени величины ускорения силы тяжести, а значит и радиуса ***Земли***.

Из предлагаемой нами модели ***эволюции Земли*** следует, что в процессе преобразования вещества G-ядра происходит его разуплотнение и возникает давление, направленное вдоль по радиусу от центра к дневной поверхности. Такие ***геодинамические*** процессы как ***образование разломов***, ***океанических хребтов***, ***разрастание дна океанов, землетрясения, образование вулканов и алмазных трубок*** можно рассматривать как следствие этого явления. Общим для таких процессов является то, что все они представляют собой различные в пространственном и временном масштабе способы ***диссипации энергии***, выделяющейся при разуплотнении вещества G-ядра. Такой подход открывает возможность для проведения численных экспериментов, соответствующих тому или иному процессу, и имеющих целью получение более полных данных как о природе сил, так и о термодинамических условиях в среде при протекании исследуемого процесса.

Реализация предлагаемых экспериментов (как натурных, так и численных) несомненно значительно расширила бы наши представления о ***Земле и Солнечной*** системе, независимо от того, верна предлагаемая модель или нет.

Список литературы

1. **Джекобс Дж.** Земное ядро. М.: Мир, 1979.
2. **Матвеенко Л. И.** Сверхдальняя радиоинтерферометрия // Природа. 1982. № 7. С. 56-67.
3. **Рингвуд А. Е.** Происхождение Земли и Луны. М.: Недра, 1982
4. **Яцкив Я. С.** Международный проект МЕРИТ. Киев, 1981.

УДК 681.5

Алена Леонидовна Кравцова
Пятигорский государственный гуманитарно-технологический университет

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ©

Обозначим через L дифференциальный оператор второго порядка, т.е.

$$L(y) \equiv \left[p_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x) \right] y \tag{1}$$

где $p_2^{//}, p_1^{/}, p_0$ представляют собой непрерывные функции в промежутке $[a,b]$. Если $y(x)$ и $u(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$ функции, то имеем:

$$\int_a^x uL(y)dx = \int_a^x \left[(p_2u)y^{//} + (p_1u)y^{/} + (p_0u)y \right] dx \tag{2}$$

$a \le x \le b$

Интегрирование соотношения (2) по частям дает:

$$\int_a^x uL(y)dx = \left[p_2uy^{/} - (p_2u)^{/}y + p_1uy \right]_a^x + \int_a^x \left[(p_2u)^{//} - (p_1u)^{/} + p_0u \right] ydx \tag{3}$$

Обозначим дифференциальный оператор, входящий в подынтегральное выражение в правой части (3) через L^*, т.е.

$$L^*(u) \equiv (p_2u)^{//} - (p_1u)^{/} + p_0u = \left[p_2\frac{d^2}{dx^2} + \left(2p_2^{/} - p_1\right)\frac{d}{dx} + p_0 + p_2^{//} - p_1^{/} \right] \cdot u \tag{4}$$

При этом соотношение (3) перепишется так:

$$\int_a^x \left[uL(y) - yL^*(u) \right] dx = \left[p_2\left(uy^{/} - y^{/}u\right) + \left(p_1 - p_2^{/}\right) \cdot uy \right]_a^x \tag{5}$$

Оператор L^* называется сопряженным по отношению к оператору L. Умножая соотношение (4) на y и интегрируя полученный результат по частям, по отношению к оператору L^*. Таким образом, операторы L^* и L взаимно сопряжены. Дифференциальное уравнение

$$L^*(u)=0 \quad (6)$$

будем называть сопряженным дифференциальному уравнению

$$L(y)=0 \quad (7)$$

Если же $L=L^*$, то оператор L и дифференциальное уравнение $L(y)=0$ будем называть сопряженными. Сравнивая выражения (1) и (5), приходим к выводу, что $L=L^*$ тогда и только, когда:

$$2p_2^/-p_1=p_1$$

Таким образом, оператор L будем самосопряженным тогда и только тогда, когда $p_1=p_2^/$. При этом:

$$L=L^*=p_2\frac{d^2}{dx^2}+p_2^/\frac{d}{dx}+p_0$$

Так как любое дифференциальное уравнение вида (7) можно преобразовать в самосопряженную форму, умножив на функцию v.

Дифференцируя соотношение (5) по x, получаем так называемую формулу Лагранжа:

$$\int_a^b\left[uL(y)-yL^*(u)\right]dx=\left[p_2\left(uy^/-u^/y\right)+\left(p_1-p_2^/\right)uy\right]_a^b \quad (8)$$

Правая часть этой формулы может быть записана как:

$$\begin{aligned}R&=\left[p_2\left(uy^/-u^/y\right)+\left(p_1-p_2^/\right)uy\right]_a^b=p_2(b)u(b)y^/(b)-p_2(b)u^/(b)y(b)+\\&+\left[p_1(b)-p_2^/(b)\right]u(b)y(a)-p_2(a)u(a)y^/(a)+\\&+p_2(a)u^/(a)y(a)-\left[p_1(a)-p_2^/(a)\right]u(a)y(a)=u_b^TPy_b\end{aligned} \quad (9)$$

где

$$u_b=\begin{bmatrix}u^/(a)\\u(a)\\u^/(b)\\u(b)\end{bmatrix}\quad y_b=\begin{bmatrix}y^/(a)\\y(a)\\y^/(b)\\y(b)\end{bmatrix}\quad P=\begin{bmatrix}0&p_2(a)&0&0\\-p_2(a)&p_2^/(a)-p_1(a)&0&0\\0&0&0&-p_2(b)\\0&0&p_2(b)&p_1(b)-p_2^/(b)\end{bmatrix} \quad (10)$$

Отметим, что:

$|P|=\left[p_2(a)p_2(b)\right]^2$ и следовательно, матрица P-невырожденная. Подстановка выражения (9) в соотношение (8) дает:

$$\int_a^b\left[uL(y)-yL^*(u)\right]dx=u_b^TPy_b \quad (11)$$

Сопряженная однородная задача

Введем следующее невырожденное линейное преобразование y_b в вектор Y:

$$Y=Ay_b \quad (12)$$

где

$$Y=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\\Y_4\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{bmatrix}$$

Заметим, что указанное преобразование может быть выполнено бесчисленным множеством способов, в зависимости от выбора матрицы А. При заданном ненулевом векторе y_b две последние строки матрицы А можно выбрать так, чтобы придать любые требуемые значения компонентам Y_3, Y_4. Это замечание используется в дальнейшем при нахождении вида сопряженных граничных условий. Поскольку $|A|\neq 0$, мы можем обратить преобразование (12) и получить:

$$y_b=A^{-1}Y$$

При этом (11) можно переписать как:

$$\int_a^b\left[uL(y)-yL^*(u)\right]dx=u_b^TPA^{-1}Y$$

или

$$\int_a^b \left[uL(y) - yL^*(u) \right] dx = U^T Y = U_1Y_1 + U_2Y_2 + U_3Y_3 + U_4Y_4 \qquad (13)$$

где

$$U^T = u_b^T P A^{-1}$$
$$U = \left(A^{-1}\right)^T P^T u_b \qquad (14)$$

Билинейная форма $U^T Y$ в соотношении (13) называется каноническим представлением билинейной формы в правой части тождества (11).

Для того чтобы найти граничные условия сопряженной задачи, положим в соотношении (13) $L(y) = 0$ и $L^*(u) = 0$ и получим:

$$U_1Y_1 + U_2Y_2 + U_3Y_3 + U_4Y_4 = 0 \qquad (15)$$

Из формулы (21) следует, что однородные граничные условия, эквивалентны равенствам:

$$Y_1 = \alpha_{11}y'(a) + \alpha_{12}y(a) + \alpha_{13}y'(b) + \alpha_{14}y(b) = 0 \qquad (16)$$

$$Y_2 = \alpha_{11}y'(a) + \alpha_{22}y(a) + \alpha_{23}y'(b) + \alpha_{24}y(b) = 0 \qquad (17)$$

С учетом равенств (16) и (17) соотношение (15) принимает вид:

$$U_3Y_3 + U_4Y_4 = 0 \qquad (18)$$

При ненулевом векторе y_b последние две строки матрицы А могут быть выбраны так, чтобы компоненты Y_3 и Y_4 принимали любые требуемые значения, лишь бы Y_3 и Y_4 не обращались в нуль одновременно. В частности, нижние строки матрицы А можно выбрать из условия $Y_3 = 1, Y_4 = 0$. При этом из соотношения (11) следует, что $U_3 = 0$. Аналогичным образом, нижние строки матрицы А можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства $Y_3 = 0, Y_4 = 0$. При этом из соотношения (11) вытекает, что $U_4 = 0$. Таким образом, задача, сопряженная задаче

$$L(y) = 0, Y_1 = Y_2 = 0 \qquad (19)$$

имеет вид:

$$L^*(u) = 0, U_3 = U_4 = 0 \qquad (20)$$

где U_3 и U_4 связаны с компонентами $u'(a), u(a), u(b)$ вектора u_b соотношением (14). Краевая задача (19) называется самосопряженной тогда и только тогда, когда $L = L^*$ и каждая из двух компонент U_3 и U_4 является линейной комбинацией $Y_1(u_b)$ и $Y_2(u_b)$, т.е. $u(x)$ пропорциональна $y(x)$.

Один из определителей:

$$\Delta ij = \alpha_{1i}\alpha_{2j} - \alpha_{1j}\alpha_{2i}, \quad i \neq j$$

матриц-блоков

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1i} & \alpha_{1j} \\ \alpha_{2i} & \alpha_{2j} \end{bmatrix}$$

должен быть отличным от нуля. Чтобы иметь возможность сравнить эти результаты с теми. которые были получены ранее, предположим. что $\Delta_{13} \neq 0$. Далее, выберем такие Y_3 и Y_4, чтобы строки матрицы А были линейно независимы.

Например, положим $Y_3 = y(a)$ и $Y_4 = -y(b)$.

При этом матрица А примет вид:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

Из формулы (19) следует, что $|A| = -\Delta_{13} \neq 0$.

Тогда

$$\left(A^{-1}\right)^T = -\frac{1}{\Delta_{13}} \begin{bmatrix} -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{21} & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & -\alpha_{11} & 0 \\ \Delta_{23} & -\Delta_{13} & \Delta_{12} & 0 \\ \Delta_{34} & 0 & -\Delta_{14} & \Delta_{13} \end{bmatrix} \qquad (22)$$

Подставляя матрицы (20) и (9) в соотношение (14) имеем (14а):

$$U=-\frac{1}{\Delta_{13}}\times\begin{bmatrix}0 & \alpha_{23}p_2(a) & 0 & \alpha_{21}p_2(b)\\ 0 & -\alpha_{13}p_2(a) & 0 & -\alpha_{11}p_2(b)\\ -\Delta_{13}p_2(a) & -\Delta_{23}p_2(a)-\Delta_{13}\left[p_2^{/}(a)-p_1(a)\right] & 0 & \Delta_{12}p_2(b)\\ 0 & -\Delta_{34}p_2(a) & -\Delta_{13}p_2(b) & -\Delta_{14}p_2(b)+\Delta_{13}\left[p_1(b)-p_2^{/}(b)\right]\end{bmatrix}\cdot u_b$$

Следовательно, граничные условия сопряженной задачи имеют вид:

$$U_3=p2(a)u^{/}(a)+\left[p_2^{/}(a)-p_1(a)+\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}}p_2(a)\right]u(a)-\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}}p_2(b)u(b)=0 \qquad (23)$$

$$U_4=p_2(b)u^{/}(b)+\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{13}}p_2(a)u(a)-\left[p_1(b)-p_2^{/}(b)-\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}}p_2(b)\right]\cdot u(b)=0 \qquad (24)$$

Для того чтобы краевые задачи были самосопряженными необходимо, чтобы $L=L^*$ и чтобы каждая из компонент U_3 и U_4 являлась линейной комбинацией $Y_1(u_b)$ и $Y_2(u_b)$. Как указывалось выше, $L=L^*$ тогда и только тогда, когда $p_1=p_2^{/}$. При этом условия (21) и (20) принимают вид:

$$\begin{aligned}&u^{/}(a)+\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}}u(a)-\frac{\Delta_{12}p_2(b)}{\Delta_{13}p_2(a)}u(b)=0\\ &u^{/}(b)+\frac{\Delta_{34}p_2(a)}{\Delta_{13}p_2(b)}u(a)+\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}}u(b)=0\end{aligned} \qquad (25)$$

Разрешая равенства относительно $y^{/}(a)$ и $y^{/}(b)$ при $\beta_1=\beta_2=0$ и заменяя y на u, получаем:

$$\begin{aligned}&u^{/}(a)=\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}}u(a)+\frac{\Delta_{34}}{\Delta_{13}}u(b)\\ &u^{/}(b)=-\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}}u(a)-\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}}u(b)\end{aligned} \qquad (26)$$

Сравнивая граничные условия (25) и (26), заключаем, что они совпадают тогда и только тогда, когда:

$$p_2(a)\Delta_{34}=p_2(b)\Delta_{12} \qquad (27)$$

Краевая задача при $\Delta_{13}\neq 0$ самосопряжена тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (25) и равенство $p_1=p_2^{/}$.

Условие разрешимости

Определив сопряженную краевую задачу, вернемся к решению неоднородной задачи. Используя определение (26), перепишем формулу Грина в виде:

$$\int_a^b uL(y)\,dx=Y_1U_1+Y_2U_2 \qquad (28)$$

$$L(y)=f(x), Y_1=\beta_1, Y_2=\beta_2$$

тогда из соотношения (28) вытекает, что условие разрешимости имеет вид:

$$\beta_1U_1+\beta_2U_2=\int_a^b f(x)u(x)\,dx \qquad (29)$$

Для того чтобы сравнить условие (29) с условием разрешимости, используем связь U_1 и U_2 с вектором u_b, описываемую формулой (14а) т.е.:

$$\begin{aligned}&U_1=-\frac{\alpha_{23}p_2(a)}{\Delta_{13}}u(a)-\frac{\alpha_{21}p_2(b)}{\Delta_{13}}u(b)\\ &U_2=-\frac{\alpha_{13}p_2(a)}{\Delta_{13}}u(a)-\frac{\alpha_{11}p_2(b)}{\Delta_{13}}u(b)\end{aligned} \qquad (30)$$

При этом соотношение (28) принимает вид:

$$\frac{\alpha_{11}\beta_2-\alpha_{21}\beta_1}{\Delta_{13}}p_2(g)u(b)-\frac{\alpha_{23}\beta_1-\alpha_{13}\beta_2}{\Delta_{13}}u(a)p_2(a)=\int_a^b f(x)u(x)\,dx$$

Если иметь дело с граничными условиями общего вида можно выразить какие-либо два из граничных значений через два других.

Список литературы

1. **Карташов Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
2. **Першин И. М.** Синтез распределённых систем управления // Динамика процессов и аппаратов химической технологии: тез. докл. II Всесоюзной конференции. Воронеж, 1990. С. 162-163.
3. **Першин И. М.** Частотный метод синтеза распределённых систем, характеризуемых уравнениями параболического типа // Изв. вузов. Серия «Приборостроение». 1991. Т. XXXIV. № 8. С. 55-60.
4. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
5. **Чернышев А. Б.** Исследование нелинейных распределенных систем управления температурными полями // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. Новочеркасск, 2004. Спец. выпуск. С. 57-60.
6. **Чернышев А. Б.** Исследование нелинейных систем с распределенными параметрами. Кисловодск: Изд-во МИЛ, 2009. 208 с.
7. **Чернышев А. Б.** Определение класса систем с распределенными параметрами для модификации частотного критерия абсолютной устойчивости // Инфоком-3: международная научно-техническая конференция. Ставрополь, 2008. С. 284-288.

УДК 62

Игорь Евгеньевич Лобанов
Московский авиационный институт (государственный технический университет)

ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕНСИФИЦИРОВАННОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В КОЛЬЦЕВЫХ КАНАЛАХ С ТУРБУЛИЗАТОРАМИ НА ВНУТРЕННЕЙ ТРУБЕ НА БАЗЕ СЕМИСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ[©]

1. *Интенсификация теплообмена при турбулентном течении в кольцевых каналах*

В современных теплообменных аппаратах широко используются теплообменные устройства с каналами, имеющими некруглое поперечное сечение, в частности, кольцевые каналы. Следует отметить, что в некоторых этих каналов теплообмен осуществляется не через всю омываемую поверхность. Кроме того, довольно часто тепловые потоки на различных поверхностях оказываются неодинаковыми: например, кольцевые каналы с внутренним или внешним обогревом, а также с двусторонним обогревом с разными тепловыми потоками.

Для создания наиболее компактных теплообменных аппаратов применяется интенсификация теплообмена.

Интенсификация теплообмена в кольцевых каналах достигается, в основном, двумя путями: турбулизацией потока и развитием поверхности теплообмена [3; 10]. Может применяться комбинация вышеупомянутых методов интенсификации.

Способ интенсификации теплообмена, связанный с развитием поверхности теплообмена, в большинстве случаев приводит к значительному увеличению стоимости труб по сравнению с гладкими трубами, в то же время он может быть неэффективен для определённых режимных и физических параметров процесса теплообмена, а именно: эти устройства для интенсификации теплообмена имеют значительные по сравнению с несущей трубой размеры, что делает невозможным их применение в узких кольцевых каналах; данные устройства целесообразно применять при малых плотностях теплового потока, когда термическое сопротивление оребрения несущественно - с ростом тепловых потоков эффективность оребрения резко падает; оребрение целесообразно применять только в том случае, когда коэффициент теплоотдачи снаружи трубы во много раз меньше коэффициента теплоотдачи внутри трубы; при больших плотностях тепловых потоков применение оребрения нецелесообразно; также эффективность оребрения резко снижается при использовании материалов с низкой теплопроводностью (например, для нержавеющих сталей); промышленное изготовление оребрённых труб гораздо сложнее, чем гладких, поэтому они обладают более высокой стоимостью по сравнению с последними.

Интенсификация теплообмена в кольцевых каналах посредством установки поверхностных турбулизаторов (Рис. 1) лишена соответствующих недостатков, присущих развитию поверхности теплообмена [Там же]. Интенсификация теплообмена путём турбулизации потока не требует существенного увеличения наружного диаметра труб и поэтому применима в любых кольцевых каналах. Изготовление турбулизаторов на наружной поверхности труб не связано со значительными технологическими трудностями. Наибольшее распространение получили турбулизаторы в виде колец из проволоки (Рис. 1*а*), надетых на гладкую трубу, проволочных спиралей, намотанных на трубу (Рис. 1*б*) или в виде треугольной нарезки (отдельные кольца или спирали) (Рис. 1*в*).

Интенсификация теплообмена путём турбулизации потока увеличивается с ростом числа Рейнольдса: при росте гидравлического сопротивления в 2,7÷5 раз максимальное увеличение теплоотдачи составляет 2÷2,5 раза [3].
