УДК 517.95

Геннадий Александрович Павлов, Наталья Александровна Абакумова
Алтайский государственный аграрный университет

К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА©

В двумерном случае рассматривается задача определения правой части уравнения Пуассона. Приведены примеры неединственности решения задачи, а также теоремы существования решения. В случае уравнения Гельмгольца подобная задача рассматривалась в работах [1; 2], а также в монографии [3, с. 651, 675, 676].

Пусть $T \subset R^2$, $T \epsilon C^{1,\lambda}$ (за исключением быть может отдельных точек).

$$\Delta U(x,y) = f(x,y)\,\varphi(x),\ (x,y) \in T \qquad (1)$$

Поставим задачу определения функции φ, если выполнены условия

$$U/\partial T = \psi, \quad U/\gamma = k, \qquad (2)$$

где $\gamma \subset T$ кривая $y = \theta(x),\ \ a \le x \le b$, причем $[a,b]$ есть проекция T на ось x, $f \in C^{\lambda}(\overline{T})$, ∂T – граница T.

Вначале покажем, что задача имеет, вообще говоря, неединственное решение. Легко проверить, что если функция f знакопеременная, то решение задачи определяется неединственным образом.

Пример 1. Пусть $T = [0,\pi] \times [0,2\pi]$, $|a| \le 1$,

$f(y) = (a + 2\sin(y - arcsina))$,

U удовлетворяет уравнению (1), условиям (2), $\psi = k = 0$, γ - прямая $y = \pi + 2arcsina$.

Тогда наряду $\varphi = 0$ данному уравнению удовлетворяет $\varphi(x) = sinx$ (решение $U = -sinx\,(a + \sin(y - arcsina)$.

Итак, условие $f(x,y) > 0$ является в некотором смысле необходимым условием. Заметим, что если вместо условия $U/\gamma = 0$ будем рассматривать условие: нормальное производное на ней равно нулю, то условие $f(x,y) > 0$ уже не будет достаточным.

Пример 2. $T = [0,\pi] \times [{}^{\pi}/_{3}, {}^{2\pi}/_{3}]$, $f(y) = siny - {}^{1}/_{4}$,

$U/\partial T = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0$.

Здесь наряду с $\varphi = 0$, задаче удовлетворяет $\varphi(x) = sinx$ (решение $U = \left({}^{1}/_{2} - siny\right)\sin{}^{x}/_{2}$).

Следующий пример, хотя и не относится к уравнению Пуассона, но по видимому, подстерегает нас, что условие $f(x,y) > 0$ явно является недостаточным для однозначного определения $\varphi(x)$.

Пример 3. Пусть $\Delta U(x,y) + \lambda U(x,y) = (2 + siny)\,\varphi(x)$, где

${}^{5}/_{3} \le \lambda < 2$ или 2$< \lambda \le 3$ произвольное число.

$T = [0,\pi] \times \left[\arcsin\left(\frac{2(2-\lambda)}{\lambda-1}\right), 2\pi + \arcsin\left(\frac{2(2-\lambda)}{\lambda-1}\right)\right]$,

$U/\partial T = \left. U\right|_{y=\pi+\arcsin\left(\frac{2(2-\lambda)}{\lambda-1}\right)=0}$.

Здесь наряду с $\varphi = 0$ есть решение $\varphi = sinx$ (решение

$U(x,y) = -2sinx/((\lambda - 1) + sinx\frac{siny}{\lambda-2}))$.

В Примере 3 наиболее интересный случай, когда λ не является собственным значением оператора Лапласа Δ. Интересно рассмотреть случай $\lambda = 2$. Перейдем к изучению задачи. Отметим вначале, что если $U(x,y)$ (заданная функция) достаточно гладкая, то заменой переменной $U(x,y) = f(x,y)v(x,y)$ уравнение (1) можно свести к эллиптическому уравнению второго порядка с коэффициентами т зависящими от x, y, где в правой части будет стоять уже функция $f(x,y) = 1$ задача определения правой части φ будет неединственная. Заметим, что уравнение в этом случае может быть записано в виде

$$\Delta v + k_1(x,y)v_x + k(x,y)v_y + \left(\frac{\Delta f(x,y)}{f(x,y)}\right)v = \varphi(x).$$

И для того, чтобы для этого уравнения соблюдался принцип максимума, необходимо, в случае $f > 0$, чтобы f была супергармонической функцией.

В связи с этим, возникает гипотеза, если $f > 0$ супергармоническая функция, то задача определения φ, возможно, не может иметь больше одного решения.

Выпишем эллиптическое уравнение общего вида, с достаточно гладкими коэффициентами, для которого справедлив принцип максимума, где задача определения правой части $\varphi(x)$ с $f = 1$ имеет не более одного решения. В общем в виде:

$$a_1(x,y)U_{yy} + a_2(x,y)U_{xy} + a_3(x)U_{xx} + b_1(x,y)U_y + b_2(x)U_x + c(x)U = \varphi(x) \qquad (3)$$

Действительно, в этом случае решение можно записать в виде

$$U(x,y) = \Phi(x) + h(x,y) \qquad (4)$$

где h - решение однородного уравнения, а Φ удовлетворяет для
$x \in [a,b]$ уравнению
$a_3(x)\Phi'' + b_2(x)\Phi' + c(x)\Phi = \varphi(x)$,
$\Phi(a) = \Phi'(a) = 0$ (5)
Тогда $h(a,y) = 0,\ (a,y)\epsilon\partial T$ и кроме того
$h(x,y)|_{\partial T} = h(x,y)|_{\gamma} = -\Phi(x)$,
то есть функция h достигает максимума (минимума) и на γ и он очевидно, если $h(x,y) \neq 0$ больше нуля, откуда получаем противоречие.

Рассмотрим теперь уравнение (1) с $f = 1$, $T\epsilon C^{2,\lambda}$ и покажем, что решение задачи существует (задача нахождения φ). Не теряя общности, можно считать $\psi = 0$.

Предположим, что $\theta\epsilon C^{2,\lambda},\ k\epsilon C^{2,\lambda},\ T\epsilon C^{2,\lambda}$.

Лемма. Существует единственное решение задачи правой части $\varphi\epsilon C^{\lambda}[a,b]$, при этом обратное отображение $(0,k) \to \varphi$ является ограниченным оператором из $C^{2,\lambda} \to C^{\lambda}$.

Доказательство. Решение задачи будем искать в виде (4) и чтобы однозначно его решить, достаточно определить функцию $\Phi(x)$. Замечая, что $h(x,y) = -\Phi(x)$, $(x,y) \in \partial T$ представим гармоническую функцию h в виде
$h(x,y) = -\int_{\partial T} \Phi(U) d\tau_{x,y}(U)$,
где $\tau_{x,y}$ - гармоническая мера. Из условия $U(\bar{x}) = k(x), \bar{x} \in \gamma$,
получим
$\Phi(x) - \int_{\partial T} \Phi(U) d\tau_{x,\theta(x)}(U) = k(x)$ (6)
Уравнение (6), по доказанному выше, не может иметь более одного решения. Интегральный оператор (6) отображает ограниченное множество $\{\Phi\}$ в ограниченное множество ограниченных функций. Из внутренних оценок Шаудера, в окрестности точек $(x, \theta(x))$ (они лежат внутри области T) оно является относительно компактным в $C^{2,\lambda}$, из того что $\theta \in C^{2,\lambda}$, $\partial T \in C^{2,\lambda}$,следует, что этот оператор вполне непрерывен из $C^{2,\lambda} \to C^{2,\lambda}$ и следовательно он имеет ограниченный обратный $C^{2,\lambda} \to C^{2,\lambda}$. Из представления $\varphi(x)$ (см. например, (4)) вытекает, что $\varphi(x) = \mathcal{P}_k(x)$, где $\mathcal{P}$ - ограниченный оператор из $C^{2,\lambda} \to C^{\lambda}$.

Замечание. Решение задачи можно искать в другом виде. Заметим, что так как $U(x,y) = 0$, $(x,y) \in \partial T$, то
$$U(x,y) = \int_T \varphi(\tau) \mathcal{G}(x,y,\tau,v) d\tau dv.$$
Откуда для нахождения $\varphi(x)$ получаем уравнение, эквивалентное задачи
$$\int_T \varphi(\tau) \mathcal{G}(x,\theta(x),\tau,v) d\tau dv = k(x).$$
Из леммы вытекает, что существует ограниченный оператор из $C^{2,\lambda} \to C^{\lambda}$ такой, что $\varphi(x) = \mathcal{P}_k(x)$.

Рассмотрим произвольную функцию $p(x)$, $a \le x \le b$, $p \in C^{\lambda}[a,b]$ и обозначим $\delta = |f(x,y) - p(x)|_{C^{\lambda}(\bar{T})}$, $p(x) \ge a_0 > 0$.

Теорема. Пусть $T \in C^{2,\lambda}, f \in C^{\lambda}(\bar{T}), p \in C^{\lambda}, \psi = 0$.

Тогда существует такое число $\delta(T, a_0)$, что для всех $\delta < \delta(T, a_0)$ для любой заданной функции f, найдется единственная функция $\varphi \in C^{\lambda}[a,b]$, удовлетворяющая условию (1).

Доказательство. Из равенства
$$U(x,y) = \int_T \varphi(\bar{x})\, f(\bar{x},\bar{y})\, \mathcal{G}(x,y,\bar{x},\bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}.$$
для нахождения φ имеем уравнение
$$\int_T p(\tau)\ \varphi(\tau)\ \mathcal{G}(x,\theta(x),\tau,y) d\tau dy +$$
$$+ \int_T (f(\tau,y) - p(\tau))\ \varphi(\tau) \times \mathcal{G}(x,\theta(x),\tau,y) d\tau dy = k(x).$$
По доказанному выше, существует такой ограниченный линейный оператор $\mathcal{P}$ из $C^{2,\lambda} \to C^{\lambda}$, что
$$\varphi(x)\, p(x) + \mathcal{P}\left(\int_T (f(y,z) - p(y)\ \mathcal{G}(x,\theta(x),y,z)\ \varphi(\tau) dy dz \right) = \mathcal{P}k(x).$$
Теперь, если выберем δ так, что второй оператор будет сжимающим из $C^{\lambda} \to C^{\lambda}$, мы получим, что уравнение имеет единственное решение.

Замечание 1. Отметим, что если вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение $\Delta U(x,y) = \Delta(f(x,y)\varphi(x))$, где f - заданная функция, $f(x,y) > 0$, $(x,y) \in \bar{T}$, $f \in C^{2,\lambda}(\bar{T})$, f - супергармоническая функция, то задача определения функции φ при условиях $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ имеет не более одного решения.

В случае $f = 1$, когда $T = [0,a] \times [0,d]$ решение задачи легко получить методом разделения переменных.

Замечание 2. К рассмотренной задаче может быть сведена задача об единственности определения коэффициента $a(x)$ при уравнении

$\Delta U(x,y) + a(x)U(x,y) = f(x,y)$.

Для этой задачи имеют место аналогичные примеры неоднозначного определения $a(x)$.

Список литературы

1. **Запреев А. С.** Теорема единственности решения плоской обратной задачи для уравнения Гельмгольца // Некорректные математические задачи и проблемы геофизики. Новосибирск, 1976. С. 46-63.
2. **Запреев А. С., Цецохо В. А.** Обратная задача для уравнения Гельмгольца. Новосибирск, 1976. 18 с.
3. **Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.** Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. 702 с.

УДК 5

Владимир Дмитриевич Шкилев
Министерство информационного развития Республики Молдова

О ЦИФРАХ И ФРАКТАЛАХ С ПОЗИЦИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ©

Бог создал целые числа, остальное изобрел человек.
Лауреат Нобелевской премии (1949) Гайзенберг (Гейзенберг)

Взятый эпиграф статьи, принадлежащий великому ученому, можно чуть скорректировать, поскольку в ней есть признаки научного самодовольства - человек пошел дальше, чем сам Бог. С наших современных позиций (2011) было бы уместнее сказать следующее: *«Бог создал целые числа и в них заложил единую Программу последующего развития всех наук, в частности, математики, а человеку предоставил возможность все это отгадать и повторить».* Натуральный ряд цифр, в котором современные математики давно не ищут ничего нового, оказался *Букварем цивилизации*, обучающим всех нас по принципу *«делай по образу и подобию, - любя, не разрушая МНОЮ созданного, и дано Вам будет»*. Натуральный ряд цифр можно сравнить и с *СЕМЕНЕМ*, из которого произрастает *ДРЕВО ЗНАНИЙ,* и с *ЗАКОНОМ ИЕРАРХИИ*, точнее с первоначальными истоками этого закона. Эти истоки позволяют изначально осознать принципы систематизации, классификации и строго распределить места для форм в соответствии с уровнем их развития. Иерархия - это система упорядоченной эволюции и этой системе подчинены абсолютно все одухотворенные формы. Без этого закона все Мироздание превратилось бы в Хаос бесформенных масс. Это можно сравнить и с *изначальной идентификацией* всех форм, включая квантовые компьютеры и звездные системы, которые также, по своей сути, являются квантовыми компьютерами. Начнем издалека.

Пифагорейский подход, который мы используем, известен в нумерологии и эзотерике несколько тысяч лет. Вернуться к истокам Всего, и в частности, арифметики, оказалось очень полезным. Нами такой подход использован для раскрытия некоторых важных современных вопросов [3; 5; 6]. Говоря о цифрах нельзя не вспомнить работы русского эмигранта в США, убежденного агностика Ивана Николаевича Панина, который, применяя традиционные пифагорейские и каббалистические приемы, обосновывал в Библии большое количество совпадений вокруг числа 7 и который приписывал библейскому тексту сверхъестественное происхождение.

В работе «Шкилев В. Д., Адамчук А. Н. О цифре 36 - священной цифре пифагорейской философской школы» опубликован материал, посвященный священной цифре пифагорейской философской школы, который будет отправной точкой для наших дальнейших рассуждений. Первоначально статья была названа иначе - «Основы квантовой арифметики». Однако это не совсем арифметика, а нечто неразрывно связанное с геометрией, это скорее квантовая *геоарифметика*. Первые шаги в этом направлении были сделаны несколько ранее при рассмотрении преодоления классического барьера между арифметикой и геометрией [4], который стоял перед нашими предками. Назвать работу «Математические основы квантовой механики» не позволяет авторитет общепризнанного крупнейшего математика фон Неймана [1]. В связи с этим, можно вспомнить, что именно Иоганн фон Нейман ввел в квантовую механику понятия «чистого состояния» и «матрицы плотности», оказавшиеся чрезвычайно плодотворными в дальнейшем при развитии квантовой теории. Остается надеяться, что в известной фразе *«Арифметика порождает геометрию, а геометрия - физику»* есть некоторый пробел, связанный с принципом построения «матрицы плотности из геометрических фигур», которого нет в [Там же]. Квантовая логика фон Неймана допускала в отличие от классической тот факт, что помимо конкретных физических величин, полученных в эксперименте, должны существовать и «непроявленные» результаты. Такая квантовая логика вызывала бурный протест со стороны классических математиков, пользующихся булевым подходом. Наша попытка выстроить геометрические фигуры, сопоставимые с цифрами, с помощью которых можно было бы «продемонстрировать» теоретические абстрактные понятия, входит в незначительное противоречие с аксиоматикой квантовой теории, в которой таких понятий как координата и время просто нет. Заменить абстрактную величину координатами геометрического объекта