

Легкоконец Владимир Калининвич

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ,
ПРИМЕНЯЕМЫХ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В
ЭКОНОМЕТРИКЕ**

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/2/49.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 2 (57). С. 137-140. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/2/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

11. Frankel J. A., Romer D. Trade and Growth: an Empirical Investigation [Электронный ресурс]. URL: <http://www.nber.org/papers/w5476.pdf> (дата обращения: 09.07.2011).
12. <http://www.comunidadandina.org>
13. <http://www.wto.org>
14. Levine R., Renelt D. Cross-Country Studies of Growth and Policy: Methodological, Conceptual, and Statistical Problems [Электронный ресурс]. URL: <http://www.iadb.org/res/publications/pubfiles/pubWP-365.pdf> (дата обращения: 09.07.2011).
15. Levine R., Zervos S. Looking at the Facts: What We Know about Policy and Growth from Cross-Country Analysis [Электронный ресурс]. URL: http://www-wds.worldbank.org/servlet/WDSCContentServer/WDSP/IB/1993/03/01/000009265_3961004084236/Rendered/PDF/multi_page.pdf (дата обращения: 09.07.2011).
16. **Pese a la Crisis, la Economía Uruguaya Creció 2,9% en 2009** [Электронный ресурс]. URL: <http://www.lanacion.com.ar/1246985-pese-a-la-crisis-la-economia-uruguaya-crecio-29-en-2009> (дата обращения: 09.07.2011).
17. Pritchett L. Measuring Outward Orientation in Developing Countries: Can It Be Done? [Электронный ресурс]. URL: http://www-wds.worldbank.org/servlet/WDSCContentServer/WDSP/IB/1991/01/01/000009265_3960930075427/Rendered/PDF/multi0page.pdf (дата обращения: 09.07.2011).
18. Pritchett L. Patterns of Economic Growth: Hills, Plateaus, Mountains, and Plains [Электронный ресурс]. URL: http://www-wds.worldbank.org/servlet/WDSCContentServer/WDSP/IB/1998/07/01/000009265_3980901110212/Rendered/PDF/multi_page.pdf (дата обращения: 09.07.2011).
19. Rodríguez F., Rodrik D. Trade Policy and Economic Growth: a Sceptic's Guide to the Cross-National Evidence [Электронный ресурс]. URL: <http://www.hks.harvard.edu/fs/drodrik/skepti1299.pdf> (дата обращения: 03.11.2009).

УДК 33

Владимир Калинникович Легкоконец

Институт управления, бизнеса и права, г. Пятигорск

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В ЭКОНОМЕТРИКЕ[©]

Широкий класс стохастических процессов применяемых для прогнозирования экономических показателей в эконометрике содержит процесс авторегрессии. К ним относятся процессы, содержащие авторегрессию и константу, авторегрессию и тренд, процесс авторегрессии - скользящего среднего, а также процессы, учитывающие сезонные колебания. В качестве примеров рассмотрим стохастические процессы содержащие авторегрессию и константу:

$$y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2} - \dots - \varphi_p y_{t-p} - \theta_0 = \varepsilon_t \quad (1)$$

а также более общий стохастический процесс авторегрессии - скользящего среднего:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2)$$

Для остальных процессов применяются аналогичные рассуждения.

Здесь $y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$ - значения временного ряда, p - порядок авторегрессии, $\varphi_1, \varphi_{t-1}, \varphi_{t-2}, \dots, \varphi_p$ - коэффициенты авторегрессии, $\theta_1, \theta_{t-1}, \theta_{t-2}, \dots, \theta_p$ - коэффициенты процесса скользящего среднего, θ_0 - постоянная величина, а ε_t - так называемый «белый шум». Он является случайным процессом, имеющим математическое ожидание 0 и дисперсию δ^2 .

Используя оператор B сдвига назад, мы можем записать (1) в эквивалентной форме:

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) y_t - \theta_0 = \varepsilon_t \quad (3)$$

или

$$\varphi(B) y_t - \theta_0 = \varepsilon_t$$

Тогда (2) можно записать:

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) y_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3 - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t \quad (4)$$

или

$$\varphi(B) y_t = \theta_0 + \theta(B) \varepsilon_t$$

При этом B считается «так называемой» псевдопеременной и работать с ней можно точно так же как с обычной переменной в алгебре, а выражение

$$1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p \quad (5)$$

можно считать обычным полиномом степени p .

Правильное прогнозирование экономических показателей возможно, если процесс авторегрессии стационарен. Для выполнения этого условия корни полинома (5) должны лежать вне единичного круга. Задача нахождения корней полинома, особенно когда степень полинома больше четырех, часто вызывает значительные трудности. По теореме Руффини-Абея корни полинома выше четвертой степени в общем случае нельзя вычислить в радикалах. Их можно вычислить только приближенно. При вычислении корней полиномов высокой степени на результат сильно влияют ошибки округления. Необходимы сложные вычислительные алгоритмы для исключения этих ошибок. Программная реализация этих алгоритмов вызывает значительные трудности. Определение стационарности процесса важно с точки зрения автоматизации прогнозирования. В самой распространенной для работы с временными рядами программе "STATISTICA" автоматическое определение стационарности процесса не предусмотрено. Если выбранный для прогнозирования пользователем стохастический процесс нестационарный, то вычислительный процесс расходится. Пользователь сам должен предварительно преобразовать исходные данные временного ряда и снова запустить расчет на выполнение. Методы преобразования исходных данных временных рядов, для того чтобы стохастический процесс стал стационарным, изложены в книге [1]. Желательно разработать программу, которая сама определяла стационарность процесса и если он нестационарный, автоматически приводила его к стационарному виду и продолжала расчет дальше. Это особенно важно для прогноза экономических показателей в реальном времени. В качестве примера можно привести задачу прогноза потребления электроэнергии в электроэнергетике в реальном времени с интервалом в 15 минут. Если находить все корни полинома (5) то автоматизировать определение стационарности трудно. Поэтому на вопрос располагаются ли корни рассматриваемого полинома вне единичного круга? Необходимо ответить без вычисления значений корней рассматриваемого полинома.

Для решения данной проблемы воспользуемся теоремами Раусса-Гурвица, Лъенара-Шипара и Шура-Кона.

Введем следующие обозначения:

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = \varphi_1, \beta_2 = \varphi_2, \beta_3 = \varphi_3, \dots, \beta_p = \varphi_p$$

Тогда полином $\varphi(B)$ можно записать в виде:

$$\beta_0 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \dots + \beta_p B^p$$

Преобразуем данный полином следующим образом:

$$B^p(\beta_0 B^{-p} + \beta_1 B^{1-p} + \beta_2 B^{2-p} + \dots + \beta_p)$$

Введем обозначение $z = B^{-1}$, тогда получим:

$$z^{-p}(\beta_0 z^p + \beta_1 z^{p-1} + \beta_2 z^{p-2} + \dots + \beta_p)$$

Тогда если корни полинома (5) лежат вне единичного круга, то корни полинома

$$\beta_0 z^p + \beta_1 z^{p-1} + \beta_2 z^{p-2} + \dots + \beta_p \quad (6)$$

находятся внутри единичного круга.

В дальнейшем понадобится определение устойчивого многочлена. Полином $f(z)$ с комплексными коэффициентами называется устойчивым, если все его корни удовлетворяют условию $\operatorname{Re}(z) < 0$, где $\operatorname{Re}(z)$ действительная часть значений корней полинома. Сведем задачу нахождения корней полинома (5) к задаче устойчивости некоторого вспомогательного полинома. Данный полином получается заменой переменной $z = \frac{u+1}{u-1}$, где z и u комплексные числа. Выражение $z = \frac{u+1}{u-1}$ производит взаимно однозначное отображение внутренности единичного круга плоскости z в левую полуплоскость плоскости u . Данное преобразование является, частным случаем преобразования Мебиуса:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in C, \quad ad-bc \neq 0$$

Здесь C обозначает множество комплексных чисел. Выполнив замену переменных получим:

$$F(u) = (u-1)^p f\left(\frac{u+1}{u-1}\right) = \beta_0(u+1)^p + \beta_1(u+1)^{p-1}(u-1) + \beta_2(u+1)^{p-2}(u-1)^2 + \dots + \beta_p(u-1)^p \quad (7)$$

Для возведения в степень воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{1*2}a^{p-2}b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1*2*3}a^{p-3}b^3 + \dots + b^p$$

Выполнив возведение в степень выражений $(u+1)^p$, $(u+1)^{p-1}$, $(u+1)^{p-2} \dots (u+1)^2$, $(u-1)^2$, $(u-1)^3, \dots, (u-1)^p$, соответствующих произведений, а также приведение подобных членов получим полином:

$$B_0 u^p + B_1 u^{p-1} + B_2 u^{p-2} + \dots + B_p \quad (8)$$

По теореме Раусса-Гурвица, для устойчивости полинома (8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$B_0 > 0, \Delta_1 = B_1 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ B_0 & B_2 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} B_1 & B_3 & B_5 \\ B_0 & B_2 & B_4 \\ 0 & B_1 & B_3 \end{vmatrix} > 0, \Delta_p = \begin{vmatrix} B_1 & B_3 & B_5 & \dots & 0 \\ B_0 & B_2 & B_4 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & B_3 & \dots & 0 \\ 0 & B_0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & B_p \end{vmatrix} > 0 \quad (9)$$

Таким образом, если полином (8) устойчив, то корни полинома (6) лежат внутри единичного круга.

Количество вычисляемых определителей $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_p$ можно существенно уменьшить, если воспользоваться теоремой Лъенара и Шипара. По этой теореме для устойчивости полинома (8) необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств из следующих четырех:

- 1) $B_p > 0, B_{p-2} > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots$
- 2) $B_p > 0, B_{p-2} > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots$
- 3) $B_p > 0, B_{p-1} > 0, B_{p-2} > 0; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots$
- 4) $B_p > 0, B_{p-1} > 0, B_{p-2} > 0; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots$

Из устойчивости полинома (8) следует, что корни полинома (6) лежат внутри единичного круга, а из этого следует расположение корней полинома (5), вне единичного круга и для рассматриваемого стохастического процесса выполняется условие стационарности.

Рассмотрим далее другой подход к решению данной задачи на основании теоремы Шура-Кона. В этом случае можно обойтись без построения вспомогательного полинома (7). Условия, при которых корни полинома (6) находятся внутри единичного круга, определяются теоремой Шура-Кона, формулировка которой приводится ниже.

Теорема Шура-Кона. Полином $f(z) = \beta_0 z^p + \beta_1 z^{p-1} + \beta_2 z^{p-2} + \dots + \beta_p$ с вещественными коэффициентами имеет все свои корни, лежащие внутри единичного круга тогда и только тогда, когда модуль старшего коэффициента $f(z)$ больше модуля свободного члена $f(z)$, то есть $|\beta_0| > |\beta_p|$, и полином

$$f_1(z) = \frac{\beta_0 f(z) - \beta_p f^*(z)}{z}$$

при

$$f^*(z) = z^n f(1/z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_p z^p$$

Полином $f_1(z)$ имеет порядок на единицу меньший чем $f(z)$:

$$f_1(z) = [\beta_0(\beta_0 z^p + \dots + \beta_p) - \beta_p(\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_p z^p)] / z =$$

$$[(\beta_0^2 - \beta_p^2)z^p + (\beta_0\beta_1 - \beta_{p-1}\beta_p)z^{p-1} + \dots + (\beta_0\beta_{p-1} - \beta_1\beta_p)z] / z =$$

$$(\beta_0^2 - \beta_p^2)z^{p-1} + (\beta_0\beta_1 - \beta_{p-1}\beta_p)z^{p-2} + \dots + (\beta_0\beta_{p-1} - \beta_1\beta_p)$$

Применим к полиному $f_1(z)$ снова теорему Шура-Кона, получим следующие необходимые условия: модуль старшего коэффициента полинома $f_1(z)$ больше модуля свободного члена данного полинома

$$|\beta_0^2 - \beta_p^2| > |\beta_0\beta_{p-1} - \beta_1\beta_p|$$

При выполнении которого дальнейшему исследованию подлежит полином:

$$f_2(z) = \frac{(\beta_0^2 - \beta_p^2)f_1(z) - (\beta_0\beta_{p-1} - \beta_1\beta_p)f_1^*(z)}{z}$$

Продолжим процедуру на конечное число шагов мы дойдем до полинома первой степени. Окончательно, необходимые и достаточные условия нахождения всех корней полинома $f(z)$ степени p внутри единичного круга получаются объединением p условий:

модуль старшего коэффициента $f(z)$ больше модуля свободного члена $f(z)$,

модуль старшего коэффициента $f_1(z)$ больше модуля свободного члена $f_1(z)$,

.....

модуль старшего коэффициента $f_{p-1}(z)$ больше модуля свободного члена $f_{p-1}(z)$.

Если все коэффициенты полинома (6) положительны и выполняются неравенства $\beta_0 > \beta_1 > \dots > \beta_p$, то по теореме Епштрема все корни полинома (6) лежат внутри единичного круга. *Теорема Епштрема.* Все корни

полинома $f(z) = \beta_0 z^p + \beta_1 z^{p-1} + \beta_2 z^{p-2} + \dots + \beta_p$ с положительными коэффициентами, удовлетворяющие неравенствам $\beta_0 > \beta_1 > \dots > \beta_p$, лежат в единичной окружности.

Из устойчивости полинома (6) следует, что корни полинома (5) лежат вне единичного круга, и для рассматриваемого стохастического процесса выполняется условие стационарности.

Рассмотренные три алгоритма решения данной задачи позволяют математически строго определить условие стационарности рассматриваемого стохастического процесса и в то же время избежать вычисления всех корней многочлена (5). Программная реализация данных алгоритмов, значительных проблем не вызывает. Их использование облегчит создание программ полностью автоматизирующих процесс прогнозирования экономических показателей, которые могут использоваться для работы в реальном времени. Это упростит и облегчит работу пользователей, которые занимаются прогнозированием экономических показателей.

Список литературы

1. Бокс Дж., Джекинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление. М.: Мир, 1974. Вып. 1.
2. Валентинов В. А. Эконометрика: учебник. 2-е изд. М.: ИТК «Дашков и К⁰», 2010.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
4. Мейман И. Н. Некоторые вопросы расположения нулей полиномов // УМН. 1949. № 6 (34).
5. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М.: Наука, 1965.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2.
7. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.
9. Ширяев В. Н. Вероятность. М.: МЦНМО, 2004. Т. 1, 2.

УДК 33

Владимир Калининвич Легкоконец

Институт управления, бизнеса и права, г. Пятигорск

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ЛИНЕЙНЫЙ ПРОЦЕСС, ВКЛЮЧАЮЩИЙ АВТОРЕГРЕССИЮ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ ТРЕНД[©]

Для прогнозирования экономических показателей в эконометрике широко применяется линейный стохастический процесс авторегрессии:

$$y_{t+p} = \varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t + \theta_0 + \varepsilon_t$$

где $y_{t+p}, y_{t+p-1}, y_{t+p-2}, \dots, y_t$ - значения временного ряда, p - порядок авторегрессии, $\varphi_1, \varphi_{t-1}, \varphi_{t-2}, \dots, \varphi_p$ - коэффициенты авторегрессии, θ_0 - постоянная величина, а ε_t - так называемый «белый шум». Он является случайным процессом, имеющим математическое ожидание 0 и дисперсию δ^2 . Рассмотрим более общий стохастический процесс, который кроме авторегрессии содержит полиномиальный тренд. Для определения параметров рассматриваемого процесса его представим в виде:

$$y_{t+p} = \varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t + \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_t^2 + \alpha_3 x_t^3 + \dots + \alpha_n x_t^n + \varepsilon_t \quad (1)$$

Здесь $\varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t$ - процесс авторегрессии порядка p , не содержащий θ_0 , $\alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_t^2 + \alpha_3 x_t^3 + \dots + \alpha_n x_t^n$ - полиномиальный тренд степени n , а $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ - коэффициенты тренда. Значение t изменяется в пределах от 1 до m . Из (1) получим:

$$y_{t+p} - \varphi_1 y_{t+p-1} - \varphi_2 y_{t+p-2} - \varphi_3 y_{t+p-3} - \dots - \varphi_p y_t - \alpha_0 - \alpha_1 x_t - \alpha_2 x_t^2 - \alpha_3 x_t^3 - \dots - \alpha_n x_t^n = \varepsilon_t \quad (2)$$

Обозначим:

$$\beta = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} y_{t+p-1} \\ y_{t+p-2} \\ y_{t+p-3} \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_t \\ x_t^2 \\ \vdots \\ x_t^n \end{pmatrix} \quad (3)$$

тогда

$$y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X} = \varepsilon_t \quad (4)$$

где β', α' транспонированные векторы β, α .