

Ипатова Валентина Михайловна, Ипатов Дмитрий Евгеньевич

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОПЕРЕЧНОГО ОБТЕКАНИЯ
БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА**

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/4/31.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по данному вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 4 (59). С. 111-113. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/4/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 517.95; 532.5

Физико-математические науки

Валентина Михайловна Ипатова, Дмитрий Евгеньевич Ипатов
Московский физико-технический институт

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОПЕРЕЧНОГО ОБТЕКАНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА[©]

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

На протяжении последних десятилетий задачи об обтекании препятствия потоком стратифицированной среды неизменно привлекают внимание исследователей, занимающихся приложением методов математики к решению тех или иных практических проблем [2; 5-6]. Тенденцией настоящего времени стал интерес к решению обратных задач об определении наименее известных характеристик математических моделей по данным измерений. Исследованию одной из таких задач посвящена настоящая работа.

Свяжем декартову прямоугольную систему координат с бесконечным цилиндром радиуса a , а именно, поместим начало координат в центр сечения цилиндра вертикальной плоскостью, перпендикулярной его оси, в этой плоскости координатную ось x направим горизонтально, а ось y - вертикально вверх. Обозначим через $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Q = \{a < r < R\}$, где $R \gg a$, и через $S = S_1 \cup S_2$ границу области Q , которая разбивается на два подмножества $S_1 = \{r = a\}$ - границу соприкосновения цилиндра с жидкостью и $S_2 = \{r = R\}$ - удаленную от цилиндра часть границы. Далее, пусть t - временная переменная, $t \in [0, T]$, где $0 < T < +\infty$, $G = Q \times (0, T)$, $D_k = S_k \times [0, T]$, $k = 1, 2$, $D = D_1 \cup D_2$ - боковая граница G .

Вектор скорости записывается в виде $\mathbf{u} = (u, v)$, где $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$. Скорость набегающего на цилиндр потока $(U(t), 0)$ полагаем не зависящей от x и y и параллельной горизонтальной оси координат. Будем считать, что среда представляет собой несжимаемую вязкую стратифицированную по плотности жидкость, предполагая, что функция плотности $\rho = \rho(x, y)$ задана, причем на замыкании $\bar{Q}$ функция ρ непрерывно дифференцируема и строго положительна, $\rho_{\max} \geq \rho(x, y) \geq \rho_0 > 0$.

Введем следующие дифференциальные операторы

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \mathbf{u} \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

В области G рассмотрим систему уравнений

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \mathbf{f}_g \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

где P - давление, μ - положительная постоянная $\mathbf{f}_g = (0, -g)$, g - ускорение свободного падения.

Одним из подходов к построению решений систем вида (1)-(2) является вариационный метод [1; 3; 6], при котором условие соленоидальности (2) не включается в исходную систему уравнений, а учитывается посредством минимизации соответствующего функционала стоимости. Следуя [3], запишем уравнение движения в виде

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_g - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3)$$

Уравнение (3) дополним начальным условием

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \equiv (u_0, v_0) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (4)$$

и граничными условиями:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad D_1, \quad \mathbf{u} = (U(t), 0) \quad \text{на} \quad D_2 \quad (5)$$

Заметим, что при выполнении (2) уравнения (1) и (3) совпадают, но запись уравнения движения в виде (3) позволяет, как будет видно ниже, существенно улучшить свойства разрешимости начально-краевой задачи (3)-(5).

Теперь введем функциональные пространства, которые будут использоваться в последующем изложении.

Пусть $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ - скалярное произведение и норма в $L_2(Q)$, $\|\cdot\|_{L_q}$ - норма пространств $L_q(Q)$, $\|\cdot\|_G$ норма в $L_2(G)$, $W_2^k(Q) \equiv H^k$, $k = 1, 2$, есть пространства Соболева с нормами $\|\cdot\|_k$, где

$$\|u\|_1 = \sqrt{\|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|u_y\|^2}, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\|u\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xy}\|^2 + \|u_{yy}\|^2},$$

$W_2^1(0, T) \equiv H$ - пространство Соболева функций $h(t)$, зависящих только от времени, с нормой

$$\|h\|_H = \sqrt{\int_0^T \left[h^2 + \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \right] dt}. \text{ Обозначим через:}$$

$$V = \{(u, v) \in H^1 \times H^1, u|_{S_1} = v|_{S_1} = 0, u|_{S_2} = \text{const}, v|_{S_2} = 0\},$$

$$X = V \cap (H^2 \times H^2), \quad F = L_2(0, T; H^1), \quad Y = L_2(0, T; X), \quad W = \{u \in Y, \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(G) \times L_2(G)\}.$$

Справедлива следующая теорема существования и единственности.

Теорема 1 [4]. Если $P \in F$, $u_0 \in V$, $U \in H$, причем $u_0 = U(0)$ на S_2 , то задача (3)-(5) имеет единственное решение $u \in W$.

Пусть при почти всех (x, y, t) в области $G_1 \subset G$ известны наблюдения за полем скорости $u = u_{obs}(x, y, t)$. Обозначим через χ характеристическую функцию множества G_1 и продолжим $u_{obs}(x, y, t)$ нулем на $G \setminus G_1$.

Будем считать, что данные наблюдений u_{obs} используются для отыскания скорости набегающего потока $U(t)$, входящей в граничное условие (5), в то время как все другие входные параметры модели зафиксированы и соответствуют предположениям Теоремы 1. Обозначим через

$$M = \{U \in H, U(0) = u_0|_{S_2}\}$$

множество, на котором разыскивается $U(t)$. Определим на M функционал

$$J(U) = \alpha \|U - U^a\|_H^2 + m_1 \|\text{div } u\|_G^2 + m_2 \|\chi u - u_{obs}\|_G^2 \quad (6)$$

где $\alpha \geq 0$ - параметр регуляризации; m_1, m_2 - неотрицательные весовые множители; u - решение задачи (3)-(5), отвечающее данному значению U ; $U^a \in H$ - априорно известное приближенное значение U .

Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти элемент $U \in M$, для которого

$$J(U) = \inf \{J(h), h \in M\} \quad (7)$$

Достаточные условия ее разрешимости дает

Теорема 2 [Там же]. При всех $\alpha > 0$, $u_{obs} \in (L_2(G))^2$ задача (7) имеет решение.

Вычислим первую вариацию функционала стоимости (6). Определим множество допустимых приращений скорости набегающего потока

$$M_0 = \{h \in H, h(0) = 0\}$$

Теорема 3. Функционал $J(U)$ дифференцируем по Гато, причем для каждого $h \in M_0$ его первая вариация имеет вид

$$\delta J(U)h = 2\alpha(h, U - U^a)_H + 2m_1(\text{div } w, \text{div } u)_G + 2m_2(\chi w, \chi u - u_{obs})_G$$

где u есть решение системы (3)-(5), а вектор-функционал w находится решением линейаризованной задачи

$$w_t + (u \nabla) w + (w \nabla) u + \frac{u}{2} \text{div } w + \frac{w}{2} \text{div } u - \frac{\mu}{\rho} \Delta w = 0,$$

$$w = 0 \text{ при } t = 0, \quad w = 0 \text{ на } D_1, \quad w = (h(t), 0) \text{ на } D_2$$

Поскольку целью процедуры ассимиляции данных наблюдений является поиск функции (скорости набегающего потока), доставляющей минимум функционалу $J(U)$, то справедлива

Теорема 4. Для того чтобы функция $U \in H$ была решением задачи ассимиляции данных (7), необходимо, чтобы для всех $h(t) \in M_0$ выполнялось равенство $\alpha(h, U - U^a)_H + m_1(\text{div } w, \text{div } u)_G + m_2(\chi w, \chi u - u_{obs})_G = 0$.

Пусть τ - шаг сетки по времени, $t_k = k\tau$, $k = 0, \dots, K$, $\tau K = T$. Обозначим через u^k приближенное решение (3)-(5) при $t = t_k$. Для дискретизации по времени используется полуявная конечно-разностная схема

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + (u^k \nabla) u^k + \frac{u^k}{2} \text{div } u^k - \frac{\mu}{\rho} \Delta u^{k+1} = f_g - \frac{1}{\rho} \nabla P^k, \quad k = \overline{0, K-1}, \quad u^0 = u_0,$$

$$u^k = 0 \text{ на } D_1, \quad u^k = (U(t_k), 0) \text{ на } D_2, \quad k = \overline{0, K}$$

На каждом временном слое решение раскладывается в ряд Фурье по системе $\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}_{n=1}^\infty$, где φ - полярный угол. По переменной r получаем краевую задачу для уравнения Бесселя, которая решается методом трехточечной прогонки. Численный алгоритм решения задачи (7) программно реализован на языке C# в интегрированной среде разработки *Microsoft Visual Studio 2010*.

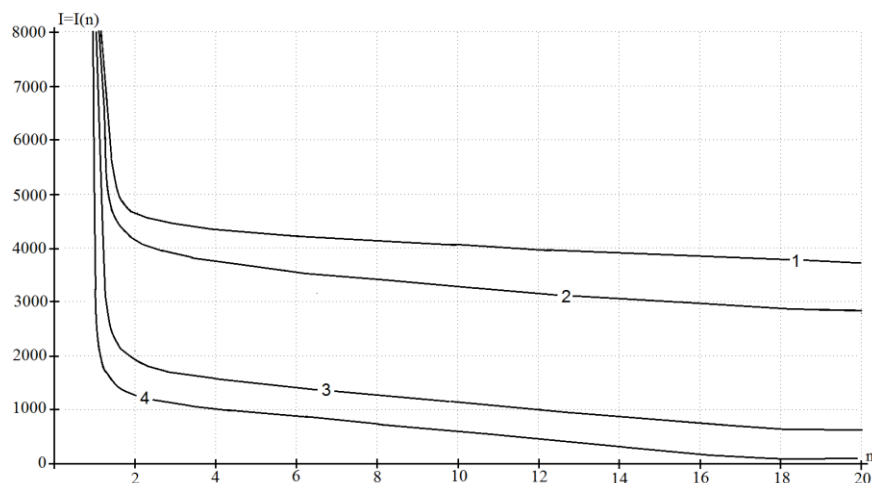


Рис. 1. Зависимость функционала стоимости от числа итераций: 1 - $\alpha=1$; 2 - $\alpha=0,5$; 3 - $\alpha=0,1$; 4 - $\alpha=0$

На Рис. 1 приведены результаты тестовых расчетов на ЭВМ, показывающие уменьшение функционала стоимости при различных значениях параметра регуляризации. Таким образом, на основании численных экспериментов можно утверждать, что методика вариационной ассимиляции данных применима к практически важному классу задач обтекания препятствия.

Список литературы

1. Агошков В. И., Ботвиновский Е. А. Численное решение нестационарной системы Стокса методами теории сопряженных уравнений и оптимального управления // ЖВМ и МФ. 2007. Т. 47. № 7. С. 1142-1157.
2. Белоцерковский О. М., Белоцерковский С. О., Гущин В. А., Морозов Е. Н., Онуфриев А. Т., Ульянов С. А. Численное и экспериментальное моделирование гравитационных внутренних волн при движении тела в стратифицированной жидкости // ДАН. 1984. Т. 279. № 3. С. 562-566.
3. Ипатова В. М. Исследование задачи, возникающей при вариационном построении решений системы Навье-Стокса // Международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения»: тезисы докладов. Новосибирск: НГУ, 2007. С. 163-164.
4. Ипатова В. М., Пыrkova О. А. Восстановление скорости набегающего потока по имеющимся данным наблюдений для модели обтекания цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики. М.: МФТИ, 2007. С. 96-104.
5. Пыrkova О. А. О возможности приближенного учета действия вязкости в плоской задаче обтекания цилиндра в полупространстве потоком стратифицированной жидкости // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики. М.: МФТИ, 1995. С. 154-165.
6. Agoshkov V. I. Inverse Processes of Some Boundary Value Problems of Hydrodynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. Vol. 19. № 3. P. 207-222.

УДК 8

Филологические науки

Галина Ивановна Каданцева

Северо-Кавказский государственный технический университет

КАЛЬКИРОВАНИЕ ИНОЯЗЫЧНОЙ ЛЕКСИКИ И ФРАЗЕОЛОГИИ В НЕМЕЦКОМ ЯЗЫКЕ[©]

Одной из самых спорных и самых актуальных проблем, связанных с процессом заимствования, является проблема классификации заимствованных элементов.

Так, например Р. Келлер [4, S. 345] делит все заимствования на две большие группы: словарные заимствования (Wortentlehnung) и кальки (Lehnprägungen). Каждая группа подразделяется на подгруппы.

«Среди заимствованных фразеологизмов различаются заимствования “чистые”, т.е. без перевода, и фразеологические кальки» [1, с. 58]. При заимствовании без перевода сохраняется подлинное звучание фразеологизма в языке-источнике: *Virtual Reality* (англ. *виртуальная реальность*), при калькировании используется пословный перевод соответствующими словами немецкого языка, поэтому такие фразеологизмы внешне не отличаются от исконно немецких.