Кравцова Алена Леонидовна
ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ
Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/4/40.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по данному вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2012. № 4 (59). C. 133-137. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/4/

УДК 681.5
Технические науки

Алена Леонидовна Кравцова
Пятигорский государственный гуманитарно-технологический университет

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ©

Для приближённого решения краевых задач теплопроводности широко применяется метод конечных разностей (метод сеток). Идея метода состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов заменяется расчетной сеткой - дискретным множеством точек (узлов). Вместо функции непрерывных аргументов вводятся функции дискретных аргументов - сеточные функции, определяемые в узлах сетки. Частные производные, входящие в дифференциальное уравнение и граничные условия, заменяются (аппроксимируются) разностными соотношениями [1-7].

Если рассматривать функцию целочисленного аргумента $U(k)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то можно образовать разности в точке k первого порядка:

правую: $\Delta U_k = U(k+1) - U(k)$,

левую: $\nabla U_k = U(k) - U(k-1)$.

Обозначив $U_k = U(k)$, получим $\Delta U_k = U_{k+1} - U_k$, $\nabla U_k = U_k - U_{k-1}$.

Тогда для разности второго порядка имеем:

$$\Delta^2 U_k = \Delta(\Delta U_k) = \Delta(U_{k+1} - U_k) = (U_{k+2} - U_{k+1}) - (U_{k+1} - U_k) = U_{k+2} - 2 \cdot U_{k+1} + U_k.$$

Аналогично определяется разность $n-$го порядка:

$$\Delta^n U_k = \Delta(\Delta^{n-1} U_k).$$

В результате такой замены краевая задача в частных производных сводится к системе разностных уравнений, называемых ещё разностной схемой.

Если решение системы разностных уравнений существует и при измельчении сетки стремится к решению поставленной задачи (т.е. сходится), то это решение и является искомым приближённым решением краевой задачи. Несмотря на то, что число неизвестных в этой системе алгебраических уравнений весьма значительно, решение её с точки зрения математических трудностей более просто, чем исходной задачи.

Итак, заменим область непрерывного изменения аргументов Ω искомой функции T некоторым конечным множеством точек, лежащих в этой области. Это множество назовём разностной сеткой, сами точки - узлами сетки, а функции, определённые тем или иным способом на этой сетке, - сеточными функциями. Расположение узлов сетки в области может быть произвольным и определяется спецификой решаемой задачи.

Рассмотрим примеры сеток:

1. В простейшем случае одномерной задачи $\Omega = \{0 \le x \le l\}$ можно ввести равномерную сетку. Для этого отрезок $[0, l]$ разобьём на N равных частей точками $x_k = k \cdot h$, $k = 0,1,\ldots,N$. Расстояние между узлами $x_{k+1} - x_k = h$ называется шагом сетки. Так как в рассматриваемом случае $h = \dfrac{l}{N} = const$, то множество узлов x_k, $k = 0,1,\ldots,N$, представляет собой равномерную сетку на отрезке $0 \le x \le l$ и обозначается $\bar{\Omega}_h = (x_k = k \cdot h, k = 0,1,\ldots,N)$. Если отрезок $[0, l]$ разбит на N частей произвольно взятыми точками, то получим неравномерную сетку с шагом $h_k = x_k - x_{k-1}$, зависящим от номера k и x_k.

2. Сетка на плоскости. Пусть $\bar{\Omega}_h = \{0 \le x \le d, 0 \le y \le b\}$ - прямоугольник. Отрезки $[0, d]$ и $[0, b]$ разобьём соответственно на M и N частей и через точки $x_k = k \cdot h$, $k = 0,1,\ldots,N$, $h = \dfrac{d}{N}$, $y_j = j \cdot p$, $j = 0,1,\ldots,M$, $p = \dfrac{b}{M}$ проведём прямые, параллельные координатным осям. Множество точек (x_k, y_j) образует сетку в прямоугольнике Ω. Полученная сетка равномерна по каждой переменной. Если $h \ne p$, тот сетка называется прямоугольной, в противном случае - квадратной. Если построить сетку неравномерной хотя бы по одной координате, то полученная сетка будет называться неравномерной.

3. Приведём пример неравномерной изометрической сетки на плоскости. Область $\Omega = (R_1 \le r \le R_2, 0 \le \theta \le 2 \cdot \pi)$, представляющую собой кольцо, покроем окружностями $r_i = R_1 \cdot \exp(ih)$, где $h = (\dfrac{1}{N})\ln(\dfrac{R_2}{R_1}), i = 0,1,\ldots,N$, и лучами $\theta_k = k \cdot p$, где $p = \dfrac{2 \cdot \pi}{M}, k = 0,1,\ldots,M-1$. Множество узлов (r_i, θ_k) и представляет собой сетку в рассматриваемой области.

По аналогии с разностной сеткой для пространственных областей вводится сетка по временной переменной τ . В общем случае эта сетка может быть неравномерной и тогда η_i - шаг сетки - зависит от номера шага. Узлы сетки определяются точками $\Omega_\eta = (\tau_i, i = 0,1,...,M; \eta_i = \tau_{i+1} - \tau_i)$ [8-11]. Для решения, например, одномерной по пространственным координатам нестационарной задачи используют произведение сеток

$$\bar{\Omega}_{h\eta} = \bar{\Omega}_h \times \bar{\Omega}_\eta = \{(x_k, \tau_i), x_{k+1} = x_k + h_k, \tau_{i+1} = \tau_i + \eta_i$$

$$k = 0,1,...,N; i = 0,1,...,M; x_0 = 0, x_N = l, \tau_0 = 0, \tau_M = t\}$$

представляющее собой пространственно-временную разностную сетку. Совокупность узлов сетки, лежащих на линии $\tau = \tau_i$, называют i -м слоем. Для простых областей, рассмотренных ранее, всегда можно ввести такую сетку, чтобы «крайние» естественные узлы сетки попадали на границу области. Эти узлы называются граничными, а остальные - внутренними. Граничные условия задачи следует задавать именно в этих граничных узлах. Однако для областей более сложной формы, например когда граница двумерной области криволинейна, «крайние» естественные узлы сетки далеко не все попадут на границу области. Тогда следует рассматривать два возможных подхода к заданию граничных условий: 1) ввести дополнительные узлы в точках пересечения линии сетки с границей и в них задать граничные условия; 2) границу области аппроксимировать ломаной, проходящей через ближайшие к границе естественные узлы и перенести каким-то образом заданные граничные условия на эту ломаную. Вопрос оптимального выбора шага сетки и те самым количества её узлов является не простым. С одной стороны, чем большая требуется точность, с которой необходимо получить решение, тем более мелкий шаг желателен. С другой стороны, слишком мелкий шаг значительно увеличивает число неизвестных, что повышает требования к быстродействию и объёму памяти ЭВМ. Очевидно, должны существовать некоторые «оптимальные» сетки со сравнительно небольшим числом узлов. Такие сетки принято называть грубыми или реальными. Построение разностной схемы проводится таким образом, чтобы получаемая в результате решения сеточная функция U была как можно ближе к решению T соответствующей краевой задачи теплопроводности. Так как функция U есть функция дискретного аргумента, а функция T - непрерывного, то они принадлежат разным функциональным пространствам [13].

Для определения степени близости этих функций обычно поступают так. Осуществляется переход от непрерывных функций к сеточным по правилу: значение сеточной функции в узле равно значению непрерывной функции в этой же точке. Например, в узле (x_k, τ_i) сетки одномерной нестационарной задачи $T_k^i = T(x_k, \tau_i)$, причём пространственные узлы сетки обозначают подстрочными индексами, а временные - надстрочными [12]. В этом случае говорят. Что сеточная функция T_k^i является проекцией функции T на пространство сеточных функций. Существуют и другие способы проектирования решения T на пространство сеточных функций. Например, если функция имеет разрыв первого рода или только интегрируемая по x , то полагают

$$T_k^i = \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} T(x, \tau_i) dx$$

Для оценки близости функции U и T рассматривается величина $\|U - T_h\|$, где $\|...\|$ некоторая норма в пространстве сеточных функций. Нормы в сеточных пространствах вводят так, чтобы при стремлении шага сетки к нулю они переходили в нормы в обычных функциональных пространствах. Наиболее часто используются: сеточный аналог чебышевской нормы в пространстве непрерывных функций C :

$$\|U\|_c = \max_{x_k \in \Omega_h} \|U\|$$

сеточный аналог гильбертовой нормы в L_2 :

$$\|U\|_{l_2} = (\sum_{X_k \in \Omega_h} H \cdot U^2(x))^{\frac{1}{2}}$$

где $H = h$ в одномерном случае; $H = h_1 \cdot h_2$ в двухмерном случае. Тогда если при бесконечном дроблении сетки величина $\|U - T_h\| \to 0$, то можно говорить о близости решений разностной задачи U и краевой задачи T . Решение исходной краевой задачи сводится, таким образом, к нахождению таблицы числовых значений функции T_h в точках сетки на соответствующей области. Для приближённого вычисления этой таблицы необходимо дифференциальный оператор краевой задачи A , заданный в классе непрерывного аргумента, приближённо заменить (аппроксимировать) разностным оператором A_h , заданным на множестве сеточных функций [14; 15]. Разностный аналог, аппроксимирующий исходную краевую задачу, можно построить различными способами. Обычно требуют, чтобы построенная разностная схема на сравнительно грубых сетках обеспечивала необходимый уровень точности для получаемого приближённого решения. Поэтому при построении разностных схем важнейшее свойство исходных операторных уравнений должны сохраняться и у их аналогов.

Среди множества возможных конструктивных подходов к построению разностных аналогов для дифференциальных операторов выделим основные: 1) метод формальной замены производных конечно-разностными выражениями; 2) метод интегральных тождеств; 3) вариационные методы построения разностных схем;

4) метод неопределённых коэффициентов. Рассмотрим более подробно первый из вышеперечисленных методов. Метод конструирования разностных схем с помощью замены производных конечно-разностными выражениями основан на использовании разложения в ряд Тейлора достаточно гладких функций, что, как правило, позволяет сохранить локальные свойства дифференциальных уравнений. Заменим каждую из производных, входящих в краевую задачу, разностным отношением, содержащим значение функции в нескольких узлах сетки, образующих некоторую конфигурацию. Такая совокупность узлов называется шаблоном. Узлы, в которых разностная схема записана на шаблоне, называют регулярными, а остальные узлы - нерегулярными. Рассмотрим возможные способы аппроксимации дифференциального оператора вида

$$A\left[T\right]=\frac{dT}{dx}$$

определённого на множестве непрерывных в области $\Omega=\{d<x<b\}$ функций, имеющих ограниченные производные до третьего порядка включительно. Пусть $\Omega_h=\{x_k=kh, 0<k<N, h=(b-d)/N\}$ - равномерная сетка на отрезке Ω. Тогда наиболее естественный способ замены производной основывается на определении производной как предела

$$\frac{dT}{dx}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\left[T(x+h)-T(x)\right]}{h}$$

Если зафиксировать h в этом равенстве, то получим приближённую формулу для первой производной через конечные разности

$$\frac{dT}{dx}\approx\frac{\left[T(x+h)-T(x)\right]}{h}$$

Или в k - м узле имеем правое разностное отношение

$$T_{x,k}=\frac{(T_{k+1}-T_k)}{h} \qquad (1)$$

Аналогично вводится левое разностное отношение

$$T_{\bar{x},k}=\frac{(T_k-T_{k-1})}{h} \qquad (2)$$

Можно рассматривать и линейную комбинацию левого и правого разностных отношений

$$\sigma\cdot T_{x,k}+(1-\sigma)\cdot T_{\bar{x},k} \qquad (3)$$

где σ - любое вещественное число. При $\sigma=\frac{1}{2}$ получим центральное разностное отношение

$$T_{x^{\circ},k}=\frac{(T_{k+1}-T_{k-1})}{(2\cdot h)} \qquad (4)$$

При замене оператора $A[T]$ разностными выражениями (1)-(4) допускается погрешность $\varphi_h(x)=A_h[T_h]-(A[T])_h$, называемая погрешностью аппроксимации оператора A разностными оператором A_h в точке x. Разностный оператор A_h аппроксимирует дифференциальный оператор A с порядком n в точке x, если $\varphi_h(x)=A_h[T_h(x)]-(A[T(x)])_h=0(h^n)$. Факт аппроксимации в точке называют часто локальной аппроксимацией. При решении задач теплопроводности необходимо уметь аппроксимировать и вторую производную

$$A[T]=\frac{d^2T}{dx^2}$$

В отличие от первой производной, для аппроксимации которой достаточно двухточечного шаблона, для второй производной выберем трёх точечный шаблон (x_{k-1},x_k,x_{k+1}). Тогда в k -м узле получим разностный оператор

$$A_k[T_k]=\frac{(T_{k+1}-2\cdot T_k+T_{k-1})}{h^2}$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора функции $T(x_k\pm h)$, получим, что порядок аппроксимации в этом случае равен двум. В соответствии с этим можно рассмотреть две различные аппроксимации оператора $A[T]=\frac{\partial T}{\partial\tau}-\frac{a\cdot\partial^2T}{\partial x^2}$ в области

$$\Omega=\{0<x<d, 0<\tau\le t\} \qquad (5)$$

$$A_{h\eta}[T]=T_\tau^i-a\cdot T_{\bar{x}\bar{x},k}^i \qquad (6)$$

$$A_{h\eta}[T]=T_\tau^i-a\cdot T_{\bar{x}\bar{x},k}^{i+1} \qquad (7)$$

на шаблонах. Погрешность локальной аппроксимации оператора (5) разностными операторами (6) и (7) будет соответственно равна

$$0(\eta+h^2)$$

Методы конструирования граничных условий

Проанализируем вопросы, связанные с построением разностных схем в нерегулярных узлах сетки (на границе или вблизи нее).

Рассмотрим смешанную краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями второго рода:

$$u_t = a^2 U_{xx} \qquad 0 < x < l \qquad 0 < t£T \qquad (8), (9), (10)$$

$$u\ \Big|_{t=0} = \mu(x) \qquad 0£x£l$$

$$u_x\ \Big|_{x=0} = \mu_1(t) \quad u_x\ \Big|_{x=1} = \mu_2(t) \quad 0£t£T$$

Граничные условия можно аппроксимировать односторонней разностью. Например, первое граничное условие (8) запишем в виде

$$\frac{1}{h}(y^{m+1}{}_1 - y^{m+1}{}_0) = \mu_1(t_{m+1}) \qquad (11)$$

(второе граничное условие (9) представляется аналогично и потому не рассматривается). Из (10) получим

$$y^{m+1}{}_0 = y^{m+1}{}_1 - h\mu_1(t_{m+1}) \qquad (12)$$

Однако невязка этого разностного уравнения равна

$$\psi_0 = (u_x)_0{}^m - \frac{1}{h}(u_1{}^m - u_0{}^m) = -\frac{h}{2}u_{xx} = 0(h)$$

т.е. имеет меньший порядок малости, чем невязка разностной схемы (12) в регулярной точке, равная $0(\tau + h^2)$.

Задача состоит в том, чтобы построить разностную схему в нерегулярных (граничных) узлах нормальной точности $0(h^2)$.

Рассмотрим методы конструирования разностных граничных условий нормальной точности $0(h^2)$ на примере краевой задачи (1)-(7).

Метод фиктивных точек. Этот метод очень нагляден. Введем вне отрезка $0 < x < l$ фиктивную точку $x_{-1} = x_0 - h$ и будем считать исходное уравнение (1) справедливым при $x_{-1} < x_0$ (здесь рассматривается левое граничное условие, правое может быть записано аналогично). Тогда разностное уравнение можно записать и для п=0:

$$\frac{1}{\tau}(y_0{}^{m+1} - y_0{}^m) = \frac{a^2}{h^2}(y^m{}_1 - 2y_0{}^m + y_{-1}{}^m)$$

В левом граничном условии (9) производную заменим симметричной разностью

$$\frac{1}{2h}(y_1{}^m - y_{-1}{}^m) = \mu_1(t_m)$$

Из последних двух уравнений значение искомой функции исключаем фиктивной точке - y_{-1}. Получаем разностное граничное условие

$$\frac{1}{h}(y^m{}_1 - y_0{}^m) = \mu_1(t_m) + \frac{h}{2a^2\tau}(y_0{}^{m+1} - y_0{}^m)$$

откуда

$$y^{m+1}{}_0 = y_0{}^m + \frac{2a^2\tau}{h}\left[\ \frac{1}{h}(y_1{}^m - y_0{}^m) - \mu_1(t_m)\ \right] \qquad (13)$$

Невязка этого последнего разностного уравнения равна $0(h^2)$, т.е. имеет более высокий порядок малости по сравнению с уравнением (10).

Метод уменьшение невязки. Этот метод менее нагляден, но более универсален. Рассмотрим построение по этому методу разностной схемы в граничной точке (левого граничного условия (9)). Представим U(x,t) с использованием формулы Тейлора:

$$u(x_1, t) = u(x_0, t) + hu_x(x_0, t) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x_0, t) + \ldots \qquad (14)$$

На основании граничного условия (9) имеем $u_x(x_0, t) = \mu_1(t)$, а из уравнения теплопроводности $u_{xx} = \frac{1}{a^2}\ u_t$.

Подставляя эти в величины в формулу Тейлора, найдем

$$u(x_1, t_m) = u(x_0, t_m) + h\mu_1(t_m)\sqrt{\frac{h^2}{2a^2}}u_t(x_0, t_m) + \ldots$$

а заменив

$$u_t \approx \frac{y_0^{m+1} - y_0^m}{\tau}$$

получим формулу.

Учитывая большее число членов ряда Тейлора, можно сконструировать с помощью метода уменьшения невязки граничные условия не только нормальной, но и повышенной точности.

Список литературы

1. **Ильюшин Ю. В.** Методика расчета оптимального количества нагревательных элементов в зависимости от значений температурного поля // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. «Информатика. Телекоммуникации. Управление». 2011. Т. 2. № 6-2 (138). С. 48-53.
2. **Ильюшин Ю. В.** Проектирование распределенной системы со скалярным воздействием // Научное обозрение. М., 2011. № 4. С. 85-90.
3. **Ильюшин Ю. В.** Проектирование системы управления температурными полями туннельных печей конвейерного типа // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. «Информатика. Телекоммуникации. Управление». 2011. № 3 (126). С. 67-72.
4. **Ильюшин Ю. В., Чернышев А. Б.** Определение шага дискретизации для расчета теплового поля трехмерного объекта управления // Изв. Южного федерального университета. Таганрог, 2011. № 6. С. 192-200.
5. **Ильюшин Ю. В., Чернышев А. Б.** Устойчивость распределенных систем с дискретными управляющими воздействиями // Изв. Южного федерального университета. Таганрог, 2010. № 12. С. 166-171.
6. **Першин И. М.** Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. Пятигорск: РИА-КМВ, 2007. 244 с.
7. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
8. **Чернышев А. Б.** Адаптация частотного критерия абсолютной устойчивости к системам с распределенными параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 7. С. 13-18.
9. **Чернышев А. Б.** Интерпретация критерия абсолютной устойчивости для нелинейных распределенных систем // Автоматизация и современные технологии. 2010. № 2. С. 28-32.
10. **Чернышев А. Б.** Исследование абсолютной устойчивости нелинейных распределенных систем // Автоматизация и современные технологии. 2010. № 4. С. 21-26.
11. **Чернышев А. Б.** Исследование нелинейных распределенных систем управления температурными полями // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. 2004. Спец. выпуск: Мат. моделирование и компьютерные технологии. С. 57-60.
12. **Чернышев А. Б.** Модифицированный годограф пространственно-апериодического звена // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2010. № 2 (1). С. 159-163.
13. **Чернышев А. Б.** Модифицированный критерий абсолютной устойчивости нелинейных распределенных систем управления // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. 2009. № 3 (151). С. 38-41.
14. **Чернышев А. Б.** Управление температурными полями объектов с распределенными параметрами // Изв. Томского политехнического университета. 2009. Т. 314. № 4. С. 24-27.
15. **Чернышев А. Б.** Устойчивость как фактор безопасности управляемых технических систем [Электронный ресурс] // Технологии техносферной безопасности: Интернет-журнал. 2010. Вып. 6 (34). URL: http://ipb.mos.ru/ttb/2010-6/2010-6.html

---

УДК 159.9
Психологические науки

Игорь Анатольевич Кривошлыков
Российская академия народного хозяйства и государственной службы

АУДИО-ВИЗУАЛЬНЫЙ СЛОВАРЬ (АВС) КАК АККУМУЛЯЦИЯ ОПЫТА ПРАКТИЧЕСКОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ НЕВЕРБАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ©

В настоящее время, в области науки о невербальном общении, существуют словари жестов, представленных в различных культурах (напр. А. А. Акишина «Жесты и мимика в русской речи» [1; 4]), а также, своего рода «физиогномические словари» [2; 3; 7; 8; 10] где детально рассматриваются различные элементы лица. Но исчерпывающего и всестороннего словаря «языка тела» (или «языка души» в терминологии В. А. Лабунской [6]), который представлял бы собой «банк данных» невербальных сигналов, до сих пор отсутствует. С нашей точки зрения, представляется, что, хотя такой словарь, на первых порах, будет представлять собой лишь обобщённую, типичную информацию, тем не менее, его формирование выступило бы катализатором развития науки в данной области, уравновешивая теоретическую и практическую стороны данной области науки. Т.е. такой словарь должен служить как утилитарным целям, так и теоретическим, восстанавливая равновесие между теорией и практикой. Следует также отметить, что российские исследователи ориентируются, в основном, на теоретическую сторону феномена «невербальное общение», при этом, позволим себе заметить, уделяя мало внимания наглядности, иллюстративности - т.е. практической (утилитарной) стороне вопроса. Среди же западных исследователей отмечается тенденция к утилитарному подходу, порой даже в ущерб академической научности.

В. А. Лабунская подчёркивала, что «Многие изображения невербального выражения личности и их описания, могут стать базой для обучения кодирования при условии отношения к ним, как к кодам-паттернам, психологическое значение которых изменяется в соответствии с изменением соотношения движений, степени их осознания, направленности, интенсивности выраженности, временной структуры и места в системе целостного невербального выражения личности» [Там же, с. 75].
