

Легкоконцев Владимир Калинин

ОБЪЕДИНЕННЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ЛИНЕЙНЫЙ ПРОЦЕСС АВТОРЕГРЕССИИ И ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/4/44.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по данному вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 4 (59). С. 143-147. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/4/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 33

Экономические науки

Владимир Калининвич Легкоконец

Институт управления, бизнеса и права, г. Пятигорск

ОБЪЕДИНЕННЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ЛИНЕЙНЫЙ ПРОЦЕСС
АВТОРЕГРЕССИИ И ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ N ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ[©]

В статье [6] для прогнозирования экономических показателей в эконометрике предлагался стохастический процесс:

$$y_{t+p} = \varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t + \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_t^2 + \alpha_3 x_t^3 + \dots + \alpha_n x_t^n + \varepsilon_t \quad (1)$$

Здесь $\varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t$ - процесс авторегрессии, порядка p , $\alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_t^2 + \alpha_3 x_t^3 + \dots + \alpha_n x_t^n$ - полиномиальный тренд степени n , $y_{t+p}, y_{t+p-1}, y_{t+p-2}, \dots, y_t$ - значения временного ряда, p - порядок авторегрессии, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ - коэффициенты авторегрессии, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ - коэффициенты тренда, а ε_t так называемый «белый шум». Он является случайным процессом, имеющим математическое ожидание 0 и дисперсию δ^2 .

С помощью процесса (1) можно вычислять прогноз многих экономических показателей. Однако имеются экономические показатели, для которых вычисление прогноза с помощью процесса (1) дает недостаточную точность. В качестве примера можно привести экономические показатели, изменение которых имеет сезонный характер. Поэтому рассмотрим более общий стохастический процесс

$$y_{t+p} = \varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t + \theta_0 + \alpha_1 \phi_1(x_t) + \alpha_2 \phi_2(x_t) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_t) + \varepsilon_t \quad (2)$$

где $\varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t$ - процесс авторегрессии порядка p , $\alpha_1 \phi_1(x_t) + \alpha_2 \phi_2(x_t) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_t)$ - линейная комбинация произвольных функций $\phi_1(x_t), \phi_2(x_t), \dots, \phi_n(x_t)$, среди которых могут быть и периодические $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ - коэффициенты при этих функциях, а θ_0 - константа. Значение t изменяется в пределах от 1 до m . Стохастический процесс (1) является частным случаем процесса (2), если $\alpha_0 = \theta_0$, $\phi_1(x_t) = x_t$, $\phi_2(x_t) = x_t^2$, $\dots$, $\phi_n(x_t) = x_t^n$.

Возникает необходимость и в более общем стохастическом процессе:

$y_{t+p} = \varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t + \theta_0 + f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \phi_1(x_t), \phi_2(x_t), \dots, \phi_n(x_t)) + \varepsilon_t$ где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и функции $\phi_1(x_t), \phi_2(x_t), \dots, \phi_n(x_t)$ связаны между собой нелинейной зависимостью. В качестве примера можно привести логистическую функцию: $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x_t) = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_t}}$.

Этот стохастический процесс можно приближенно свести к процессу (2). Для этого необходимо разложить функцию $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \phi_1(x_t), \phi_2(x_t), \dots, \phi_n(x_t))$ в ряд Тейлора. В общем случае разложение имеет следующий вид:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \phi_1(x_t), \phi_2(x_t), \dots, \phi_n(x_t)) = f(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0, \phi_1(x_t), \phi_2(x_t), \dots, \phi_n(x_t)) + \\ + \sum_{j=1}^n (a_j - a_j^0) \frac{\partial f(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0, \phi_1(x_t), \phi_2(x_t), \dots, \phi_n(x_t))}{\partial a_j} \Big|_{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0} + R$$

где $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0$ - начальные приближения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а R - остаточный член.

Вычислив значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, их снова можно взять в качестве начального приближения и снова повторить расчет. Они рассчитываются по вычислительному алгоритму для стохастического процесса (2), который изложен ниже. Данную процедуру можно повторять несколько раз до получения необходимой точности. Количество повторений этой процедуры, число n определяющее количество членов в разложении ряда Тейлора, а также остаточный член R определяются при рассмотрении конкретной функции вида $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \phi_1(x_t), \phi_2(x_t), \dots, \phi_n(x_t))$.

Из (2) получим:

$$y_{t+p} - \varphi_1 y_{t+p-1} - \varphi_2 y_{t+p-2} - \varphi_3 y_{t+p-3} - \dots - \varphi_p y_t - \theta_0 - \alpha_1 \phi_1(x_t) - \alpha_2 \phi_2(x_t) - \dots - \alpha_n \phi_n(x_t) = \varepsilon_t \quad (3)$$

Обозначим:

$$\beta = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} y_{t+p-1} \\ y_{t+p-2} \\ y_{t+p-3} \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_1(x_t) \\ \phi_2(x_t) \\ \vdots \\ \phi_n(x_t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Тогда

$$y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X} = \varepsilon_t \quad (5)$$

где β' , α' транспонированные векторы β , α .

Величины ε_t предполагаются независимыми и нормально распределенными с нулевыми средними и дисперсиями δ^2 . Так как $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ не зависят от $\bar{Y}$ и $\bar{X}$, то условная плотность распределения случайных величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ при заданных значениях $\bar{Y}$ и $\bar{X}$ совпадает с безусловной и равна:

$$\frac{1}{(2\pi\delta^2)^{m/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\delta^2} \sum_{t=1}^m \varepsilon_t^2\right) \quad (6)$$

Подставим в выражение (6) значение ε_t из выражения (5) получим:

$$\frac{1}{(2\pi\delta^2)^{m/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\delta^2} \sum_{t=1}^m (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X})^2\right) \quad (7)$$

Выражение (7) рассматривается как функция правдоподобия по отношению к параметрам β , α . Значения параметров β , α при которых достигает минимума сумма $\sum_{t=1}^m (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X})^2$ являются оценками максимального правдоподобия для этих параметров. Для этого надо найти частные производные по векторам β , α и приравнять их к нулю, а затем решить полученную систему уравнений.

Найдем частные производные по векторам β и α . Для этого воспользуемся формулой дифференцирования по вектору $\frac{\partial(B'C)}{\partial B} = C$ [2], где B и C некоторые векторы, а B' транспонированный вектор B .

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sum_{t=1}^{m-p} (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X})^2)}{\partial \beta} &= 2 \sum_{t=1}^{m-p} (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X}) \frac{\partial(y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X})}{\partial \beta} = \\ &= -2 \sum_{t=1}^{m-p} (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X}) \bar{Y} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sum_{t=1}^{m-p} (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X})^2)}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{t=1}^{m-p} (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X}) \frac{\partial(y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X})}{\partial \alpha} = \\ &= -2 \sum_{t=1}^{m-p} (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X}) \bar{X} \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{m-p} (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X}) \bar{Y} = 0 \\ \sum_{t=1}^{m-p} (y_{t+p} - \beta' \bar{Y} - \alpha' \bar{X}) \bar{X} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Раскрывая скобки, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{m-p} \beta' \bar{Y} \bar{Y} + \sum_{t=1}^{m-p} \alpha' \bar{X} \bar{Y} = \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p} \bar{Y} \\ \sum_{t=1}^{m-p} \beta' \bar{Y} \bar{X} + \sum_{t=1}^{m-p} \alpha' \bar{X} \bar{X} = \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p} \bar{X} \end{cases} \quad (11)$$

В выражении $\sum_{t=1}^{m-p} \beta' \bar{Y} \bar{Y}$ выполним умножения

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^{m-p} \beta' \bar{Y} \bar{Y} = \sum_{t=1}^{m-p} (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_p) \times \begin{pmatrix} y_{t+p-1} \\ y_{t+p-2} \\ y_{t+p-3} \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{t+p-1} \\ y_{t+p-2} \\ y_{t+p-3} \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} = \\
& = \sum_{t=1}^{m-p} (\varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t) \times \begin{pmatrix} y_{t+p-1} \\ y_{t+p-2} \\ y_{t+p-3} \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \varphi_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1}^2 + \dots + \varphi_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} y_{t+p-2} + \dots + \varphi_3 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} y_t \\ \varphi_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} y_{t+p-1} + \dots + \varphi_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2}^2 + \dots + \varphi_3 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} y_t \\ \varphi_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} y_{t+p-1} + \dots + \varphi_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} y_{t+p-2} + \dots + \varphi_3 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3}^2 + \dots + \varphi_p \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} y_t \\ \vdots \\ \varphi_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_t y_{t+p-1} + \dots + \varphi_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_t y_{t+p-2} + \dots + \varphi_3 \sum_{t=1}^{m-p} y_t y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p \sum_{t=1}^{m-p} y_t^2 \end{pmatrix} \quad (12)
\end{aligned}$$

В результате получим матрицу-столбец (12).

Раскроем выражение $\sum_{t=1}^{m-p} \alpha' \bar{X} \bar{Y}$

$$= \sum_{t=1}^{m-p} (\theta_0 + \alpha_1 \phi_1(x_t) + \alpha_2 \phi_2(x_t) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_t)) \times \begin{pmatrix} y_{t+p-1} \\ y_{t+p-2} \\ y_{t+p-3} \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{aligned} &\theta_0 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} + \alpha_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} \phi_1(x_t) + \alpha_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} \phi_2(x_t) \dots + \alpha_n \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} \phi_n(x_t) \\ &\theta_0 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} + \alpha_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} \phi_1(x_t) + \alpha_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} \phi_2(x_t) \dots + \alpha_n \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} \phi_n(x_t) \\ &\theta_0 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} + \alpha_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} \phi_1(x_t) + \alpha_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} \phi_2(x_t) \dots + \alpha_n \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} \phi_n(x_t) \\ &\dots\dots\dots \\ &\theta_0 \sum_{t=1}^{m-p} y_t \dots + \alpha_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_t \phi_1(x_t) + \alpha_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_t \phi_2(x_t) \dots + \alpha_n \sum_{t=1}^{m-p} y_t \phi_n(x_t) \end{aligned} \right) \quad (13)$$

Раскрыв, получим матрицу-столбец (13).

Выполним умножения в выражении $\beta' \bar{Y} \bar{X}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^{m-p} \beta' \bar{Y} \bar{X} &= \sum_{t=1}^{m-p} (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_p) \times \begin{pmatrix} y_{t+p-1} \\ y_{t+p-2} \\ y_{t+p-3} \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_1(x_t) \\ \phi_2(x_t) \\ \vdots \\ \phi_n(x_t) \end{pmatrix} = \\
 &= \sum_{t=1}^{m-p} (\varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t) \times \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_1(x_t) \\ \phi_2(x_t) \\ \vdots \\ \phi_n(x_t) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} \dots + \dots + \varphi_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} \dots + \dots + \varphi_3 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} \dots + \dots + \varphi_p \sum_{t=1}^{m-p} y_t \\ \varphi_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} \phi_1(x_t) \dots + \dots + \varphi_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} \phi_1(x_t) + \varphi_3 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} \phi_1(x_t) \dots + \dots + \varphi_p \sum_{t=1}^{m-p} y_t \phi_1(x_t) \\ \varphi_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} \phi_2(x_t) \dots + \dots + \varphi_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} \phi_2(x_t) + \varphi_3 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} \phi_2(x_t) \dots + \dots + \varphi_p \sum_{t=1}^{m-p} y_t \phi_2(x_t) \\ \varphi_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} \phi_3(x_t) \dots + \dots + \varphi_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} \phi_3(x_t) + \varphi_3 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} \phi_3(x_t) \dots + \dots + \varphi_p \sum_{t=1}^{m-p} y_t \phi_3(x_t) \\ \dots \\ \varphi_1 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-1} \phi_n(x_t) \dots + \dots + \varphi_2 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-2} \phi_n(x_t) + \varphi_3 \sum_{t=1}^{m-p} y_{t+p-3} \phi_n(x_t) \dots + \dots + \varphi_p \sum_{t=1}^{m-p} y_t \phi_n(x_t) \end{pmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

В результате получим матрицу-столбец (14).

Раскроем выражение $\sum_{t=1}^{m-p} \alpha' \bar{X} \bar{X}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^{m-p} \alpha' \bar{X} \bar{X} &= \sum_{t=1}^{m-p} (\theta_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n) \times \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_1(x_t) \\ \phi_2(x_t) \\ \vdots \\ \phi_n(x_t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_1(x_t) \\ \phi_2(x_t) \\ \vdots \\ \phi_n(x_t) \end{pmatrix} = \\
 &= \sum_{t=1}^{m-p} (\theta_0 + \alpha_1 \phi_1(x_t) + \alpha_2 \phi_2(x_t) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_t)) \times \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_1(x_t) \\ \phi_2(x_t) \\ \vdots \\ \phi_n(x_t) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} m\theta_0 \dots + \alpha_1 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_1(x_t) \dots + \alpha_2 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_2(x_t) \dots + \dots + \alpha_n \sum_{t=1}^{m-p} \phi_n(x_t) \\ \theta_0 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_1(x_t) + \alpha_1 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_1^2(x_t) \dots + \alpha_2 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_2(x_t) \phi_1(x_t) \dots + \dots + \alpha_n \sum_{t=1}^{m-p} \phi_n(x_t) \phi_1(x_t) \\ \theta_0 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_2(x_t) + \alpha_1 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_1(x_t) \phi_2(x_t) + \alpha_2 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_2^2(x_t) \dots + \dots + \alpha_n \sum_{t=1}^{m-p} \phi_n(x_t) \phi_2(x_t) \\ \dots \\ \theta_0 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_n(x_t) + \alpha_1 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_1(x_t) \phi_n(x_t) + \alpha_2 \sum_{t=1}^{m-p} \phi_2(x_t) \phi_n(x_t) \dots + \dots + \alpha_n \sum_{t=1}^{m-p} \phi_n^2(x_t) \end{pmatrix} \quad (15)
 \end{aligned}$$

В результате раскрытия получим матрицу-столбец (15).

Учитывая матрицы-столбцы (12), (13), (14), (15), получим:

$$\begin{cases}
\varphi_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1}^2 + \dots + \varphi_2 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} y_{i+p-2} + \dots + \varphi_p \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} y_i + \theta_0 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} + \dots + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} \phi_n(x_i) = \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p} y_{i+p-1} \\
\varphi_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} y_{i+p-1} + \dots + \varphi_2 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2}^2 + \dots + \varphi_p \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} y_i + \theta_0 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} + \dots + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} \phi_n(x_i) = \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p} y_{i+p-2} \\
\varphi_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-3} y_{i+p-1} + \dots + \varphi_2 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-3} y_{i+p-2} + \dots + \varphi_p \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-3} y_i + \theta_0 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-3} + \dots + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-3} \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-3} \phi_n(x_i) = \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p} y_{i+p-3} \\
\dots \\
\varphi_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_i y_{i+p-1} + \dots + \varphi_2 \sum_{i=1}^{m-p} y_i y_{i+p-2} + \dots + \varphi_p \sum_{i=1}^{m-p} y_i^2 + \dots + \theta_0 \sum_{i=1}^{m-p} y_i + \dots + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_i \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m-p} y_i \phi_n(x_i) = \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p} y_i \\
\varphi_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} + \dots + \varphi_2 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} + \dots + \varphi_p \sum_{i=1}^{m-p} y_i + \dots + \theta_0 m + \dots + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m-p} \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m-p} \phi_n(x_i) = \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p} \\
\varphi_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} \phi_1(x_i) + \dots + \varphi_2 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} \phi_1(x_i) + \dots + \varphi_p \sum_{i=1}^{m-p} y_i \phi_1(x_i) + \dots + \theta_0 \sum_{i=1}^{m-p} \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m-p} \phi_2(x_i) + \dots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m-p} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p} \phi_1(x_i) \\
\varphi_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} \phi_2(x_i) + \dots + \varphi_2 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} \phi_2(x_i) + \dots + \varphi_p \sum_{i=1}^{m-p} y_i \phi_2(x_i) + \dots + \theta_0 \sum_{i=1}^{m-p} \phi_2(x_i) + \dots + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m-p} \phi_3(x_i) + \dots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m-p} x_i^{n+2} = \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p} \phi_2(x_i) \\
\varphi_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} \phi_3(x_i) + \dots + \varphi_2 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} \phi_3(x_i) + \dots + \varphi_p \sum_{i=1}^{m-p} y_i \phi_3(x_i) + \dots + \theta_0 \sum_{i=1}^{m-p} \phi_3(x_i) + \dots + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m-p} \phi_4(x_i) + \dots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m-p} x_i^{n+3} = \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p} \phi_3(x_i) \\
\dots \\
\varphi_1 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-1} \phi_n(x_i) + \dots + \varphi_2 \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p-2} \phi_n(x_i) + \dots + \varphi_p \sum_{i=1}^{m-p} y_i \phi_n(x_i) + \dots + \theta_0 \sum_{i=1}^{m-p} \phi_n(x_i) + \dots + \alpha_1 \sum_{i=1}^{m-p} \phi_n(x_i) \phi_1(x_i) + \dots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m-p} \phi_n^2(x_i) = \sum_{i=1}^{m-p} y_{i+p} \phi_n(x_i)
\end{cases} \quad (16)$$

Решив данную систему линейных уравнений с помощью прямых или итерационных методов, определим параметры авторегрессии $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p$, константу θ_0 и коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ при функциях $\phi_1(x_i), \phi_2(x_i), \dots, \phi_n(x_i)$.

Используя оператор B сдвига назад, мы можем записать (3) в эквивалентной форме:

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) y_t - \theta_0 - \alpha_1 \phi_1(x_t) - \alpha_2 \phi_2(x_t) - \alpha_3 \phi_3(x_t) - \dots - \alpha_n \phi_n(x_t) = \varepsilon_t$$

или

$$\varphi(B) y_t - \theta_0 - \alpha_1 \phi_1(x_t) - \alpha_2 \phi_2(x_t) - \alpha_3 \phi_3(x_t) - \dots - \alpha_n \phi_n(x_t) = \varepsilon_t$$

B считается, «так называемой», псевдопеременной и работать с ней можно точно так же как с обычной переменной в алгебре, а выражение

$$1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p \quad (17)$$

можно считать обычным полиномом. Корни этого полинома должны лежать вне единичного круга, для того чтобы рассматриваемый случайный процесс был стационарным. Для определения стационарности, если степень полинома (17) больше двух, целесообразнее не находить корни полинома, а воспользоваться теоремами Шура-Кона или теоремами Раussa-Гурвица и Лъенара-Шипара [5]. Если процесс не стационарен, то $y_{t+p}, y_{t+p-1}, y_{t+p-2}, \dots, y_t$ значения временного ряда необходимо преобразовать. Методы таких преобразований описаны в книге [1]. Правильное прогнозирование экономических показателей возможно только с использованием стационарных процессов. Для выполнения прогноза на момент времени $t+p$ воспользуемся стохастическим процессом (2):

$$y_{t+p} = \varphi_1 y_{t+p-1} + \varphi_2 y_{t+p-2} + \varphi_3 y_{t+p-3} + \dots + \varphi_p y_t + \theta_0 + \alpha_1 \phi_1(x_t) + \alpha_2 \phi_2(x_t) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_t) + \varepsilon_t$$

Определим математическое ожидание от обеих частей данного выражения:

$E[y_{t+p}] = \varphi_1 E[y_{t+p-1}] + \varphi_2 E[y_{t+p-2}] + \dots + \varphi_p E[y_t] + \theta_0 + \alpha_1 \phi_1(x_t) + \alpha_2 \phi_2(x_t) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_t) + E[\varepsilon_t]$ Так как значением ε_t является «белый шум», то $E[\varepsilon_t] = 0$. Здесь выражение $E[\dots]$, обозначает математическое ожидание. Отсюда следует: $E[y_{t+p}] = \varphi_1 E[y_{t+p-1}] + \varphi_2 E[y_{t+p-2}] + \dots + \varphi_p E[y_t] + \theta_0 + \alpha_1 \phi_1(x_t) + \alpha_2 \phi_2(x_t) + \dots + \alpha_n \phi_n(x_t)$.

Таким образом математическое ожидание $E[y_{t+p}]$ левой части полученного выражения является значением прогноза на период времени $t+p$.

Список литературы

1. Бокс Дж., Джекинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление. М.: Мир, 1974.
2. Валентинов В. А. Эконометрика: учебник. 2-е изд. М.: ИТК «Дашков и К⁰», 2010.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971. Т. 1.
5. Легкоконец В. К. Определение стационарности линейных стохастических процессов, применяемых для прогнозирования экономических показателей в эконометрике // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 2 (57). С. 137-140.
6. Легкоконец В. К. Стохастический линейный процесс, включающий авторегрессию и полиномиальный тренд // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 2 (57). С. 140-144.
7. Магнус Я. Р., Нейдекер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и экономике. М.: Физматлит, 2002.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2.