Ройтенберг Владимир Шлеймович
О БИФУРКАЦИЯХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, ИМЕЮЩИХ СЕПАРАТРИСУ, ПРЕДЕЛЬНУЮ К КОНТУРУ ИЗ СЕПАРАТРИС ДВУХ РАЗНОПЛАНОВЫХ СЕДЕЛ

Описана бифуркационная диаграмма типичной двухпараметрической деформации векторного поля на двумерной сфере, имеющего контур, образованный двумя седлами с седловыми величинами противоположных знаков и двумя их сепаратрисами, к которому предельна сепаратриса еще одного седла.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/7/34.html
Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2012. № 7 (62). C. 116-121. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/7/

© Издательство "Грамота"
Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net
Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

Список литературы

1. **Васильевич Л.** Цветообозначения как проблема терминологии и перевода. М.: Наука, 1987. С. 59-87.
2. **Новиков Ф. Н.** Роль цветообозначений в конструировании художественного текста // Ярославский педагогический вестник. Гуманитарные науки. 2011. Т. I. № 2. С. 186-189.
3. **Тернер В. У.** Проблема цветовой классификации в примитивных культурах (на материале ритуала ндембу) // Семиотика и искусствометрия. М.: Мир, 1972. С. 50-81.
4. **Тресиддер Дж.** Словарь символов / пер. с англ. С. Палько. М.: ФАИР-ПРЕСС, 1999. 448 с.
5. **Фридлендер М.** Об искусстве и знаточестве. СПб.: Андрей Наследников, 2001. С. 41-42.

УДК 517.9
Физико-математические науки

Описана бифуркационная диаграмма типичной двухпараметрической деформации векторного поля на двумерной сфере, имеющего контур, образованный двумя седлами с седловыми величинами противоположных знаков и двумя их сепаратрисами, к которому предельна сепаратриса еще одного седла.

Ключевые слова и фразы: двухпараметрические семейства векторных полей на плоскости и сфере; сепаратрисы седел; разноплановые седла; сепаратрисный контур; бифуркационные кривые.

Владимир Шлеймович Ройтенберг, к. ф.-м. н., доцент
Кафедра высшей математики
Ярославский государственный технический университет
vroitenberg@mail.ru

О БИФУРКАЦИЯХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, ИМЕЮЩИХ СЕПАРАТРИСУ, ПРЕДЕЛЬНУЮ К КОНТУРУ ИЗ СЕПАРАТРИС ДВУХ РАЗНОПЛАНОВЫХ СЕДЕЛ©

Введение

Пусть X^r - топологическое векторное пространство C^r-векторных полей на двумерной сфере S^2 с C^r-топологией ($r \geq 3$). Рассмотрим в X^r подмногообразие Σ_{2*}^r коразмерности два, состоящее из векторных полей X_0, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Все особые точки и замкнутые траектории поля гиперболические. 2. Существуют седла z_i^0 ($i=1,2$), их входящие сепаратрисы L_{0i}^+ и выходящие сепаратрисы L_{0i}^- такие, что $L_{01}^+ = L_{02}^-$, $L_{02}^+ = L_{01}^-$. 3. Не существует двойных сепаратрис, отличных от $L_{0i}^\pm$ ($i=1,2$). 4. Если $\lambda_{i1}^0 < 0$ и $\lambda_{i2}^0 > 0$ - собственные значения $dX_0(z_i^0)$, а $\lambda_i^0 := -\lambda_{i2}^0 / \lambda_{i1}^0$, то $\lambda_1^0 < \lambda_1^0\lambda_2^0 < 1 < \lambda_2^0$ (седла z_i^0 - разноплановые). 5. К сепаратрисному контуру $\Gamma_0 := L_{01}^+ \cup L_{02}^+ \cup \{z_1^0, z_2^0\}$ $\alpha-$предельна сепаратриса $\tilde{L}_0^+$ седла $\tilde{z}^0$ (Рис. 1).

Множество $S^2 \setminus \Gamma_0$ состоит из двух компонент связности. В силу условия 5 одна из них (обозначим ее G) не пересекается с сепаратрисами седел z_i^0 ($i=1,2$). Выберем C^r-вложения $\eta^i : (-1,1) \to S^2$ ($i=1,2$), трансверсальные полю X_0, так, чтобы $\eta^i(0) \in L_{0i}^-$, а $\eta^i(0,1) \subset G$.

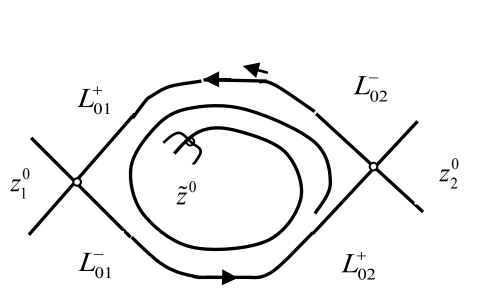

Рис. 1. *Траектории векторного поля* X_0

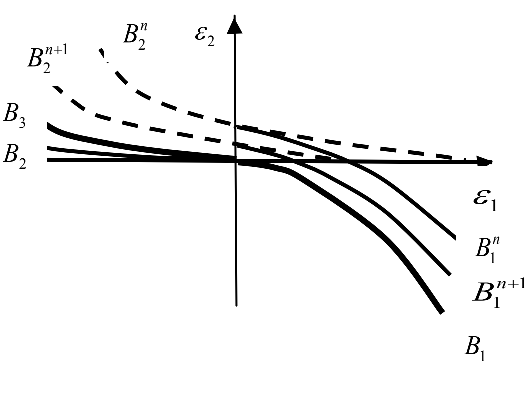

Рис. 2. *Бифуркационные кривые*

© Ройтенберг В. Ш., 2012

Рассмотрим двухпараметрическое семейство векторных полей $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon\in \mathrm{E}}$ – C^r – отображение $\mathrm{E} \ni \varepsilon \mapsto X_\varepsilon \in \mathrm{X}^r$ окрестности E нуля в $\mathbf{R}^2$ в пространство X^r, трансверсально пересекающее Σ^r_{2*} в точке X_0.

Будем в дальнейшем обозначать $i \mapsto \bar{i}$ нетождественную перестановку множества $\{1,2\}$. Если окрестность E достаточно мала, то векторное поле X_ε имеет седла $z_i(\varepsilon)$ ($i=1,2$) такие, что $z_i(\cdot)\in C^r$, $z_i(0)=z_i^0$, собственные значения $dX_\varepsilon(z_i(\varepsilon))$ равны $\lambda_{ik}(\varepsilon)$, где $\lambda_{ik}(\cdot)\in C^{r-1}$, $\lambda_{ik}(0)=\lambda^0_{ik}$ ($k=1,2$), эти седла имеют входящие (выходящие) сепаратрисы $L_i^+(\varepsilon)$ ($L_i^-(\varepsilon)$), первый раз пересекающие при убывании (возрастании) времени трансверсаль $\eta^{\bar{i}}(-1,1)$ ($\eta^i(-1,1)$) в точках $\eta^{\bar{i}}(u^+_{\bar{i}}(\varepsilon))$ ($\eta^i(u_i^-(\varepsilon))$), где $u_i^\pm(\cdot)\in C^r$, $u_i^\pm(0)=0$. Обозначим $\eta^\pm_{i\varepsilon}(u):=\eta^i(u+u_i^\pm(\varepsilon))$. Трансверсальность семейства $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathrm{E}}$ к Σ^r_{2*} означает линейную независимость векторов $\left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(u_i^-(\varepsilon)-u_i^+(\varepsilon))\right|_{\varepsilon=0}$. Поэтому в E мы можем выбрать C^r – координаты $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ так, что

$$u_i^-(\varepsilon)-u_i^+(\varepsilon)=\varepsilon_i \quad (i=1,2) \tag{1}$$

Далее будем отождествлять точку $\varepsilon\in\mathrm{E}$ с ее координатной строкой $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ и обозначать $|\varepsilon|:=\max\{|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|\}$. Выберем такое число $\rho>0$, что $\varepsilon\in\mathrm{E}$ при $|\varepsilon|\le\rho$.

В силу условия 5 и выбора трансверсали η^1 для любого числа $\bar{u}\in(0,1)$ сепаратриса $\tilde{L}_0^+$ пересекает дугу $\eta^1(0,\bar{u})$. Пусть $\eta^1(\tilde{u}_0)$ - одна из точек пересечения. Мы можем выбрать столь малое число $\bar{\delta}=\bar{\delta}(\bar{u})>0$, что при $|\varepsilon|<\bar{\delta}$ векторное поле X_ε имеет седло $\tilde{z}(\varepsilon)$ с входящей сепаратрисой $\tilde{L}^+(\varepsilon)$, трансверсально пересекающей дугу $\eta^+_{1\varepsilon}(0,\bar{u})$ в точке $\eta^+_{1\varepsilon}(\tilde{u}(\varepsilon))$, где $\tilde{u}(\cdot)\in C^r$, $\tilde{u}(0)=\tilde{u}_0$.

Для векторных полей, удовлетворяющих условиям 1-4, бифуркации в окрестности контура Γ_0 описаны в работе [2]. Аналогичные результаты были получены независимо и автором (они приведены в обзоре [1, с. 109]). При достаточно малом $\delta>0$ 1) сепаратрисы $L_i^+(\varepsilon)$ и $L_i^-(\varepsilon)$, $|\varepsilon|<\delta$, совпадают, если $\varepsilon\in B_i=\{\varepsilon:|\varepsilon|<\delta,\ \varepsilon_2=\gamma_i(\varepsilon_1)\}$, где $\gamma_1:(0,\delta)\to(-\delta,0)$ и $\gamma_2:(-\delta,0)\to(0,\delta)$ – такие C^r – функции, что $\gamma_1(+0)=\gamma_1'(+0)=0$, $\gamma_2(-0)=\gamma_2'(-0)=0$; 2) векторное поле $X_\varepsilon, |\varepsilon|<\delta$, имеет в окрестности контура Γ_0 следующие замкнутые траектории: двойной цикл при $\varepsilon\in B_3=\{\varepsilon:\varepsilon_2=\gamma_3(\varepsilon_1)\}$, где $\gamma_3:(-\delta,0)\to(0,\delta)$ – C^{r-1} – функция, $\gamma_3(-0)=\gamma_3'(-0)=0$, $\gamma_2(\varepsilon_1)<\gamma_3(\varepsilon_1)$, два грубых цикла при $\gamma_2(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<\gamma_3(\varepsilon_1)$, один неустойчивый грубый цикл при $\varepsilon_2\le\gamma_2(\varepsilon_1),\ \varepsilon_1\le 0$ и $\varepsilon_2<\gamma_1(\varepsilon_1),\ \varepsilon_1>0$ (рис. 2). Будем обозначать $\mathrm{E}^+_\delta:=\{\varepsilon:\gamma(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<\delta\}$, где $\gamma(\varepsilon_1)=\gamma_3(\varepsilon_1)$ при $-\delta<\varepsilon_1<0$, $\gamma(0)=0, \gamma(\varepsilon_1)=\gamma_1(\varepsilon_1)$ при $0<\varepsilon_1<\delta$.

Здесь мы опишем бифуркационные кривые, соответствующие сепаратрисе $\tilde{L}^+(\varepsilon)$, идущей в одно из седел $z_i(\varepsilon)$ ($i=1,2$). Заметим, что для случая одноплановых седел ($\lambda_i^0>1, i=1,2$) такие бифуркационные кривые получены автором в работе [4].

Теорема. *Существуют такие окрестность* E_0 *и число* $\delta>0$, *что при* $\varepsilon\in\mathrm{E}_0$ *сепаратриса* $\tilde{L}^+(\varepsilon)$ *совпадает с сепаратрисой* $L_i^-(\varepsilon)$ ($i=1,2$) *тогда и только тогда, когда* $\varepsilon\in\bigcup_{n=1}^{\infty}B_i^n$, *где* $B_i^n=\{\varepsilon:\varepsilon_2=\gamma_i^n(\varepsilon_1)\}$, $\gamma_1^n:(0,\delta)\to(-\delta,\delta)$, $\gamma_2^n:(-\delta,\mu_n)\to(0,\delta)$ – C^{r-1} – *функции,* $\mu_n\downarrow 0$, $\gamma_2^n(\mu_n-0)=(\gamma_2^n)'(\mu_n-0)=0$, μ_{n+1} - *единственный нуль функции* γ_1^n, $(\gamma_1^n)'(\mu_{n+1})<0$, $(\gamma_2^n)'(0)=(\gamma_1^n)'(+0)$, $\forall\tau\in(0,\delta)$ $\gamma_1^n(\tau)\downarrow\gamma_1(\tau)$ *при* $n\to\infty$, $\forall\tau\in(-\delta,0)$ $\gamma_2^n(\tau)\downarrow\gamma_3(\tau)$ *при* $n\to\infty$ (Рис. 2).

Замечание. В работе автора [5] эта теорема приведена без доказательства.

Доказательство теоремы

Обозначим $\lambda_i(\varepsilon):=-\lambda_{i2}(\varepsilon)/\lambda_{i1}(\varepsilon)$ ($i=1,2$). Мы можем считать ρ столь малым, что $\lambda_1(\varepsilon)<\lambda_1(\varepsilon)/\lambda_2(\varepsilon)<1<\lambda_2(\varepsilon)$ при $|\varepsilon|\le\rho$. Тогда

$$\lambda^*:=\max_{|\varepsilon|\le\rho}\lambda_1(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon)<1,\ \lambda_*:=\min_{|\varepsilon|\le\rho}\lambda_1(\varepsilon)<1,\ \underline{\lambda}:=\min_{|\varepsilon|\le\rho}\lambda_2(\varepsilon)>1 \tag{2}$$

При достаточно малых $u_*\in(0,1)$ и $\delta_*\in(0,\rho)$ определены отображения по траекториям векторного поля $X_\varepsilon, |\varepsilon|<\delta_*$: $\eta^+_{\bar{k}\varepsilon}(u)\mapsto\eta^-_{k\varepsilon}(\varphi_k(u,\varepsilon))=\eta^+_{k\varepsilon}(f_k(u,\varepsilon))$, $u\in(0,u_*), k=1,2$, где $\varphi_k\in C^r$, $\varphi'_{ku}(u,\varepsilon)>0$, и ввиду (1) $f_k(u,\varepsilon)=\varepsilon_k+\varphi_k(u,\varepsilon)$. Согласно [3]

$$\varphi_k(u,\varepsilon)=u^{\lambda_k(\varepsilon)}(c_k(\varepsilon)+g_k(u,\varepsilon)),\ k=1,2 \tag{3}$$

где $c_k\in C^r$, $c_k(0)>0$,

$|\partial^{i+j} g_k(u,\varepsilon)/\partial u^i \partial \varepsilon_s^j| \le u^{\alpha-i}$ для $0 \le i+j \le 1,\ l=1,2$ и некоторого $\alpha > 0$ (4)

Из (2)-(4) получаем, считая u_* и δ_* достаточно малыми, что существуют такие постоянные M_1 и M_2, $0 < M_1 < 1 < M_2$, что для $k=1,2$, $u \in (0,u_*)$, $|\varepsilon| < \delta_*$

$$M_1 u^{\lambda_k(\varepsilon)} \le \varphi_k(u,\varepsilon) \le M_2 u^{\lambda_k(\varepsilon)} \tag{5}$$

$$M_1 u^{\lambda_k(\varepsilon)-1} \le f'_{ku}(u,\varepsilon) \le M_2 u^{\lambda_k(\varepsilon)-1} \tag{6}$$

$$\left|f'_{k\varepsilon_k}(u,\varepsilon)-1\right| \le M_2 u^{\lambda_k(\varepsilon)} |\ln u| \le M_2 u_*^{\lambda_*} |\ln u_*| \le 1/4 \tag{7}$$

$$\left|f'_{\bar{k}\varepsilon_k}(u,\varepsilon)\right| \le M_2 u^{\lambda_k(\varepsilon)} |\ln u| \le M_2 u_*^{\lambda_*} |\ln u_*| \le 1/4 \tag{8}$$

Введем функцию $f(u,\varepsilon) := f_1(f_2(u,\varepsilon),\varepsilon)$. Она определена на открытом подмножестве множества $(0,u_*)\times(-\delta_*,\delta_*)^2$. Выбрав достаточно малые числа $\bar{u} \in (0,u_*)$ и $\delta_0 \in (0,\delta_*)$, при $u \in (0,\bar{u})$, $|\varepsilon| < \delta_0$ будем иметь $f_2(u,\varepsilon) \le \delta_0 + M_2 \bar{u} < u_*$. Если при этом $f_2(u,\varepsilon) > 0$, то функция f определена в точке (u,ε). Согласно [2] мы можем считать, что

$$f(u,\varepsilon) > u \text{ при } u \in (0,\bar{u}),\ \varepsilon \in \mathrm{E}^+_{\delta_0} \cup \{0\} \tag{9}$$

Из равенства $f'_{\varepsilon_k}(u,\varepsilon) = \left[f'_{1v}(v,\varepsilon) f'_{2\varepsilon_k}(u,\varepsilon) + f'_{1\varepsilon_k}(v,\varepsilon) \right]_{v=f_2(u,\varepsilon)}$, используя оценки (2), (5)-(8), считая $\bar{u}$ и δ_0 достаточно малыми, получаем

$$f'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon) \ge M_1(\varepsilon_2 + M_2 u^{\lambda_2(\varepsilon)})^{\lambda_1(\varepsilon)-1} 3/4 - 1/4 \ge M_1(\delta_0 + M_2\bar{u})^{\lambda^*-1} 3/4 - 1/4,$$

а если $\varepsilon_2 \ge 0$, то

$$\left|f'_{\varepsilon_1}(u,\varepsilon)-1\right| \le M_2 M_1^{\lambda_*-1} u^{\lambda_2(\varepsilon)(\lambda_1(\varepsilon)-1)} M_2 u^{\lambda_2(\varepsilon)} |\ln u| + 1/4 \le M_2^2 M_1^{\lambda_*-1} \bar{u}^{\lambda_*} |\ln \bar{u}| + 1/4 \le 1/2,$$

и потому

$$f'_{\varepsilon_1}(u,\varepsilon) \ge 1/2 \text{ при } (u,\varepsilon) \in (0,\bar{u})\times(-\delta_0,\delta_0)\times[0,\delta_0)$$

$$f'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon) \ge 1/2 \text{ при } (u,\varepsilon) \in (0,\bar{u})\times(-\delta_0,\delta_0)^2 \tag{10}$$

Обозначим $\underline{u}(\varepsilon) := \max\{0, \varepsilon_1, (\max\{0,\varepsilon_2\})^{1/\lambda_2(\varepsilon)}\}$. Так как $\underline{u}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то можно считать, что $\underline{u}(\varepsilon) < \bar{u}$, если $|\varepsilon| < \delta_0$. Из равенства $f'_u(u,\varepsilon) = \left[f'_{1v}(v,\varepsilon) f'_{2u}(u,\varepsilon) \right]_{v=f_2(u,\varepsilon)}$ и оценок (2), (5), (8) получаем при $|\varepsilon| < \delta_0$, $u \in (\underline{u}(\varepsilon),\bar{u})$

$$f'_u(u,\varepsilon) \ge M_1^2(\varepsilon_2 + M_2 u^{\lambda_2(\varepsilon)})^{\lambda_1(\varepsilon)-1} u^{\lambda_2(\varepsilon)-1} \ge M_1^2(1+M_2)^{-1} u^{\lambda_2(\varepsilon)(\lambda_1(\varepsilon)-1)} u^{\lambda_2(\varepsilon)-1} =$$
$$= M_1^2(1+M_2)^{-1} u^{\lambda_1(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon)-1} \ge M_1^2(1+M_2)^{-1} \bar{u}^{\lambda^*-1}.$$

Поэтому $\bar{u}$ можно считать выбранным так, что

$$f'_u(u,\varepsilon) \ge 2 \text{, если } |\varepsilon| < \delta_0,\ u \in (\underline{u}(\varepsilon),\bar{u}) \tag{11}$$

Обозначим $f^m(\cdot,\varepsilon)$ - m-ю степень отображения $f(\cdot,\varepsilon)$. Функция $f^m(\cdot,\cdot)$ определена на некотором открытом множестве. Из (10) следует, что если $|\varepsilon| < \delta_0$, $u \in (0,\bar{u})$ и значение $f^m(u,\varepsilon)$ ($m \ge 1$) определено, то

$$(f^m)'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon) \ge 1/2 \tag{12}$$

$$(f^m)'_{\varepsilon_1}(u,\varepsilon) \ge 1/2 \text{ при } \varepsilon_2 \ge 0 \tag{13}$$

Из (5) имеем при $|\varepsilon| < \delta_0$, $u \in (\underline{u}(\varepsilon),\bar{u})$

$$f(u,\varepsilon) \le \varepsilon_1 + M_2(\varepsilon_2 + M_2 u^{\lambda_2(\varepsilon)})^{\lambda_1(\varepsilon)} \le u + M_2(1+M_2) u^{\lambda_1(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon)} \le C u^{\lambda_1(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon)},$$

где $C = 1 + M_2 + M_2^2$. Но тогда для $m \ge 1$

$$f^m(u,\varepsilon) \le C^{1+\lambda_1(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon)+\ldots+(\lambda_1(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon))^{m-1}} u^{(\lambda_1(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon))^m},$$

откуда, учитывая (2), получаем

$$f^m(u,\varepsilon) \le D u^{(\lambda_1(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon))^m} \text{ при } |\varepsilon| < \delta_0,\ u \in (\underline{u}(\varepsilon),\bar{u}),\ D = C^{1/(1-\lambda^*)} \tag{14}$$

Теперь выберем для числа $\bar{u}$ соответствующее ему число $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\bar{u}) < \delta_0$ и обозначим $\hat{u} := \min\limits_{|\varepsilon|\le\bar{\delta}} \tilde{u}(\varepsilon)$. Мы можем считать, что $\underline{u}(\varepsilon) < \hat{u}$ при $|\varepsilon| \le \bar{\delta}$. Из (14) следует

Лемма 1. *Если* $|\varepsilon| \le \bar{\delta},\ u \in (\underline{u}(\varepsilon),\hat{u}),\ f^n(u,\varepsilon) \ge \hat{u}$, *то* $n \ge (\ln|\ln u| - N)/|\ln \lambda_*|$, *где* $N = \left|\ln|\ln \hat{u}/D|\right|$.

Сепаратриса $\tilde{L}^+(\varepsilon)$ совпадает с сепаратрисой $L_i^-(\varepsilon)$ ($|\varepsilon| \le \bar{\delta}$, $i = 1,2$) тогда и только тогда, когда $\zeta_i^n(\varepsilon) = 0$ при некотором $n \in \mathbf{N}$, где

$\zeta_1^n(\varepsilon) := f^n(\varepsilon_1, \varepsilon) - \tilde{u}(\varepsilon)$, $\quad \zeta_2^n(\varepsilon) := f^n(+0, \varepsilon) - \tilde{u}(\varepsilon) = f^{n-1}(f_1(\varepsilon_2, \varepsilon), \varepsilon) - \tilde{u}(\varepsilon)$.

Лемма 2. *При достаточно малом* $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ *из условий* $|\varepsilon| \le \delta$, $\zeta_i^n(\varepsilon) = 0$ ($i = 1, 2$) *следует, что* $(\zeta_i^n)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) > 0$.

Доказательство. Определим $p(u, \varepsilon)$ как наименьшее из чисел $m \ge 0$, для которых $f^m(u, \varepsilon) > \underline{u}(\varepsilon)$. Пусть $p = p(\varepsilon_1, \varepsilon)$. Тогда $n \ge p$. Обозначим $f^{p+k-1}(\varepsilon_1, \varepsilon) =: u_k(\varepsilon)$. Так как, $f^n(\varepsilon_1, \varepsilon) = f^{n-p}(u_1(\varepsilon), \varepsilon)$, а при $k \ge 1$ $u_k(\varepsilon) > \underline{u}(\varepsilon)$, то из (11)-(12) получаем, что

$$(f^n)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1, \varepsilon) = f'_u(u_{n-p}(\varepsilon), \varepsilon) \cdots f'_u(u_1(\varepsilon), \varepsilon)(f^p)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1, \varepsilon) + (f^{n-p})'_{\varepsilon_2}(u_1(\varepsilon), \varepsilon) \ge 2^{n-p-1} \quad (15)$$

По условию $f^{n-p}(u_1(\varepsilon), \varepsilon) = \tilde{u}(\varepsilon) \ge \hat{u}$, поэтому согласно лемме 1,

$$n - p \ge (\ln|\ln u_1(\varepsilon)| - N) / |\ln \lambda_*| \quad (16)$$

Так как $u_0(\varepsilon) \le \underline{u}(\varepsilon)$, $\underline{u}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то если $|\varepsilon| \le \delta$, где $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ достаточно мало, то

$$u_1(\varepsilon) = f(u_0(\varepsilon), \varepsilon) \le \varepsilon_1 + M_2(\varepsilon_2 + M_2 u_0^{\lambda_2(\varepsilon)}(\varepsilon))^{\lambda_1(\varepsilon)} \le \varepsilon_1 + M_2(\varepsilon_2 + M_2 \underline{u}(\varepsilon))^{\lambda_*}.$$

Поэтому $u_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и ввиду (16) δ можно считать выбранным так, что

$$n - p - 1 > \log_2 \max_{k=1,2} \max_{|\varepsilon| \le \delta} |\tilde{u}'_{\varepsilon_k}(\varepsilon)| \quad (17)$$

Из (15) и (17) получаем неравенство $(\zeta_1^n)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) > 0$. Неравенство $(\zeta_2^n)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) > 0$ доказывается аналогично.

Аналогично доказывается и

Лемма 3. *При достаточно малом* $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ *из условий* $\varepsilon \in (-\delta, \delta) \times [0, \delta)$ *и* $\zeta_i^n(\varepsilon) = 0$ ($i = 1, 2$) *следует, что* $(\zeta_i^n)'_{\varepsilon_1}(\varepsilon) > 0$.

Далее будем считать δ выбранным в соответствии с леммами 1 и 2.

Лемма 4. *Существуют такие натуральные числа* n_1 *и* n_2, *что при* $n \ge n_i$ *уравнение* $\zeta_i^n(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\big|_{\varepsilon_{\bar{i}} = 0} = 0$ ($i = 1, 2$) *имеет на интервале* $(0, \delta)$ *единственное решение* $\varepsilon_i = \delta_i^n$, *при этом* $\delta_i^n \downarrow 0$.

Доказательство. Ввиду (5) функции $\varphi_i(u, \varepsilon)$ ($i = 1, 2$) можно доопределить по непрерывности в точках $(0, \varepsilon)$, положив $\varphi_i(0, \varepsilon) := 0$. Соответственно, $f(u, \varepsilon)$ будет определена и непрерывна при $(u, \varepsilon) \in [0.\bar{u}) \times [0, \bar{\delta}]^2$, $f(0, 0) = 0$, $f(u, \varepsilon) > 0$ при $\varepsilon \ne 0$. Теперь по индукции получаем, что для любого натурального k существует такое число $v_k > 0$, что функция $f^k(u, \varepsilon)$ будет определена и непрерывна на $[0, v_k) \times [0, v_k)^2$ и $f^k(0, 0) = 0$. Но тогда v_k можно выбрать столь малым, что $f^k(\varepsilon_1, \varepsilon)\big|_{\varepsilon_2 = 0} < \hat{u}$ при $\varepsilon_1 \in (0, v_k)$, и потому

$$\forall k \in \mathbf{N} \ \ \zeta_1^k(\varepsilon_1, 0) < 0 \ \text{ при } \varepsilon_1 \in (0, v_k) \quad (18)$$

Ввиду (9) найдется такое натуральное число n_1, что

$$\zeta_1^{n_1}(\delta, 0) > 0 \quad (19)$$

Отсюда, аналогично доказательству леммы 2, получаем, что

$$(\zeta_1^{n_1})'_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1, 0) > 0 \ \text{ при } \varepsilon_1 \in (0, \delta) \quad (20)$$

Теперь из (18)-(20) следует, что уравнение $\zeta_1^{n_1}(\varepsilon_1, 0) = 0$ имеет на интервале $(0, \delta)$ единственное решение $\varepsilon_1 = \delta_1^{n_1}$. Повторяя рассуждение, по индукции получаем, что при $n > n_1$ уравнение $\zeta_1^n(\varepsilon_1, 0) = 0$ имеет на интервале $(0, \delta)$ единственное решение $\varepsilon_1 = \delta_1^n < \delta_1^{n-1}$. Если $\lim \delta_1^n = \alpha > 0$, то векторное поле $X_{(\alpha, 0)}$ имеет единственную седловую связку. Тогда при достаточно большом n векторное поле X_ε, $\varepsilon = (\delta_1^n, 0)$, может иметь не более одной седловой связки. Но это противоречит тому, что их на самом деле две. Таким образом, $\delta_1^n \downarrow 0$ и утверждение леммы 4 при $i = 1$ доказано. В случае $i = 2$ доказательство аналогично.

Обозначим $n_* = \max\{n_1, n_2\}$. Из лемм 3 и 4 и теоремы о неявной функции следует, что для любого $n \ge n_*$ найдется интервал $J_n = (a_n, b_n)$, $0 \le a_n < \delta_1^n < b_n \le \delta$, на котором существует единственная C^r-функция $\gamma_1^n : J_n \to (-\delta, \delta)$, такая, что $\zeta_1^n(\varepsilon_1, \gamma_1^n(\varepsilon_1)) \equiv 0$, $\gamma_1^n(\delta_1^n) = 0$, при этом $(\gamma_1^n)'(\varepsilon_1) < 0$ для $\varepsilon_1 \le \delta_1^n$, $\gamma_1^n(\varepsilon_1) > 0$ ($\gamma_1^n(\varepsilon_1) < 0$) для $\varepsilon_1 < \delta_1^n$ ($\varepsilon_1 > \delta_1^n$). Пусть далее J_n - максимальный (по включению) из таких интервалов. Из определения функции ζ_1^n видно, что если она определена в какой-нибудь точке множества $\{\varepsilon \in E_\delta^+ : \varepsilon_1 > 0\}$, то она определена и в некоторой окрестности этой точки, а множество ее нулей замкнуто в $\{\varepsilon \in E_\delta^+ : \varepsilon_1 > 0\}$. Кроме того функции ζ_1^n и ζ_1^{n+1} не имеют общих нулей, Поэтому

1) либо (1а) $a_n > 0, a_{n+1} < a_n$, $\gamma_1^n(a_n + 0) = \delta$ при всех $n \ge n_*$, либо (1б) существует такое $n_- \ge n_*$, что $a_n = 0$ при $n \ge n_-$;

2) либо (2а) существует такое $m \ge n_*$, что $b_m < \delta$, $\gamma_1^n(b_m - 0) = \gamma_1(b_m)$, либо (2б) $b_n = \delta$ при всех $n \ge n_*$.

В случае (1а) $a_n \downarrow 0$. Аналогично (19) мы можем считать, что $\zeta_2^{n_2}(0,\delta) > 0$. Тогда при достаточно большом $n > n_*$ и $\varepsilon^n = (a_n + 1/n, \gamma_1^n(a_n + 1/n))$ будет $\zeta_1^{n_2}(\varepsilon^n) > 0$ и тем более $\zeta_1^n(\varepsilon^n) > 0$ или $\zeta_1^n(\varepsilon^n)$ не определено в противоречие определением γ_1^n. Поэтому имеет место только случай (1б). В случае (2а) обозначим $\hat{\varepsilon} := (b_m, \gamma_1(b_m))$. Аналогично доказательству неравенства (18) получаем, что найдется такое число $v > 0$, что при $|\varepsilon - \hat{\varepsilon}| < v,\ \varepsilon \in E^+$ имеем $\zeta_1^m(\varepsilon) < 0$. Поэтому $\zeta_1^m(\varepsilon_1, \gamma_1^m(\varepsilon_1)) < 0$ при ε_1 достаточно близком к b_m, в противоречие с определением $\gamma_1^m(\varepsilon_1)$. Итак, $J_n = (0,\delta)$ при $n \ge n_-$. Так как $\zeta_1^{n+1}(\varepsilon) \ne \zeta_1^n(\varepsilon)$, а то $\gamma_1^n(\varepsilon_1) \ne \gamma_1^{n+1}(\varepsilon_1))$. Учитывая, что $\gamma_1^{n+1}(\delta_1^{n+1}) = 0, \gamma_1^n(\delta_1^{n+1}) > 0$, получаем $\forall \varepsilon_1 = (0,\delta)$ $\gamma_1^{n+1}(\varepsilon_1) < \gamma_1^n(\varepsilon_1))$. То, что $\gamma_1^n(\varepsilon_1) \downarrow \gamma_1(\varepsilon_1))$, несложно доказывается от противного.

Для любых $n > n_-$, $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$ число $\varepsilon_2 = \gamma_1^n(\varepsilon_1)$ является единственным решением уравнения $\zeta_1^n(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ на интервале $(\gamma_1(\varepsilon_1), \gamma_1^{n_-}(\varepsilon_1))$. Действительно, если бы для какого-нибудь $\overline{\varepsilon}_1 \in (0,\delta)$ уравнения $\zeta_1^n(\overline{\varepsilon}_1, \varepsilon_2) = 0$ имело решение $\overline{\varepsilon}_2 \ne \gamma_1^n(\varepsilon_1)$, то, рассуждая как выше, получаем существование единственной C^r- функции $\overline{\gamma}_1^n : (0,\delta) \to (-\delta,\delta)$, такой, что $\zeta_1^n(\varepsilon_1, \overline{\gamma}_1^n(\varepsilon_1)) \equiv 0$, $\overline{\gamma}_1^n(\overline{\varepsilon}_1) = \overline{\varepsilon}_2$, при этом $\forall \varepsilon_1 = (0,\delta)$ $\overline{\gamma}_1^n(\varepsilon_1) < \gamma_1^{n_-}(\varepsilon_1)$, $\overline{\gamma}_1^n : (+0) > 0$, $\overline{\gamma}_1^n(\delta - 0) < \overline{\gamma}_1^n(\delta - 0) < 0$. Но тогда $\overline{\gamma}_1^n(\varepsilon_1') = 0$ при некотором $\varepsilon_1' \in (0, \delta_1^{n_-})$. В силу леммы 4 $\varepsilon_1' = \delta_1^n$ и потому $\forall \varepsilon_1 = (0,\delta)$ $\overline{\gamma}_1^n(\varepsilon_1) = \gamma_1^n(\varepsilon_1)$.

Возможно увеличив число n_-, аналогично функциям γ_1^n, для любого $n \ge n_-$ получаем существование C^r- функции $\gamma_2^n : (-\delta, \mu_n) \to (-\delta,\delta)$, где $\mu_n = \delta_1^m$ при некотором m, такой, что $\gamma_2^n(0) = \delta_2^n$, $\gamma_2^n(\mu_n - 0) = 0$ и $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, \mu_n)$ $\varepsilon_2 = \gamma_2^n(\varepsilon_1)$ – единственное решение уравнения $\zeta_2^n(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ на интервале $(0,\delta)$, $\forall \tau \in (-\delta, 0)$ $\gamma_2^n(\tau) \downarrow \gamma_3(\tau)$ при $n \to \infty$.

Покажем, что $\mu_n = \delta_1^{n-1}$. Имеем

$$\zeta_2^n(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_2 - \varphi_1^{-1}(a_n(\varepsilon), \varepsilon) = 0 \tag{21}$$

где $\varphi_1^{-1}(\cdot,\varepsilon)$ - функция, обратная к $\varphi(\cdot,\varepsilon)$, $a_n(\varepsilon) := f^{-n+1}(\tilde{u}(\varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon_1$. Функция $a_n(\cdot)$ определена в некоторой окрестности точки $\hat{\varepsilon} := (\delta_1^{n-1}, 0)$, $a_n(\tilde{\varepsilon}) = 0$. Из (2)-(4) следует, что $\varphi_1^{-1}(+0,\varepsilon) = (\varphi_1^{-1})_u'(+0,\varepsilon) = (\varphi_1^{-1})_{\varepsilon_i}'(+0,\varepsilon) = 0$ ($i = 1,2$). Поэтому равенства $\Phi(u,\varepsilon) := 0$ при $u \le 0$ и $\Phi(u,\varepsilon) := \varphi_1^{-1}(u,\varepsilon)$ при $u > 0$ и определяют в некоторой окрестности точки $(0,\hat{\varepsilon}) \in \mathbf{R} \times \mathrm{E}$ $C^1 -$функцию Φ, для которой $\Phi(0,\varepsilon) = \Phi_u'(0,\varepsilon) = \Phi_{\varepsilon_i}'(0,\varepsilon) = 0$ ($i = 1,2$). Функция $\Phi(a_n(\varepsilon), \varepsilon)$ определена в некоторой окрестности точки $\hat{\varepsilon}$, $\Phi(a_n(\hat{\varepsilon}), \hat{\varepsilon}) = \Phi(0,\hat{\varepsilon}) = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon_i}\Phi(a_n(\hat{\varepsilon}), \hat{\varepsilon}) = \ = \Phi_u'(0,\hat{\varepsilon}) a_{n\varepsilon_i}'(\hat{\varepsilon}) + \Phi_{\varepsilon_i}'(0,\hat{\varepsilon}) = 0$ ($i = 1,2$). Отсюда по теореме о неявной функции получаем, что существуют положительные числа v_i ($i = 1,2$) и $C^1 -$функция $\rho : J_{v_1} \to (-v_2, v_2)$, где $J_{v_1} = (\delta_1^{n-1} - v_1, \delta_1^{n-1} + v_1)$, такие, что $\rho(\delta_1^{n-1}) = \rho'(\delta_1^{n-1}) = 0$,

$$\varepsilon_2 - \Phi(a_n(\varepsilon), \varepsilon) = 0,\ \varepsilon \in J_{v_1} \times (-v_2, v_2) \Leftrightarrow \varepsilon_2 = \rho(\varepsilon_1) \tag{22}$$

Так как $(\gamma_1^{n-1})'(\delta_1^{n-1}) = -(\zeta_1^{n-1})_{\varepsilon_1}'(\delta_1^{n-1}, 0)/(\zeta_1^{n-1})_{\varepsilon_2}'(\delta_1^{n-1}, 0) < 0$, то при достаточно малом v_1 для $\varepsilon_1 \in (\delta_1^{n-1} - v_1, \delta_1^{n-1})$ имеем $\rho(\varepsilon_1) < \gamma_1^{n-1}(\varepsilon_1)$. Поэтому для $\varepsilon = (\varepsilon_1, \rho(\varepsilon_1))$ $\zeta_1^{n-1}(\varepsilon) < 0$, то есть $f^{n-1}(\varepsilon_1, \varepsilon) < \tilde{u}(\varepsilon)$. Но тогда $a_n(\varepsilon) > 0$, $\Phi(a_n(\varepsilon), \varepsilon) = \varphi_1^{-1}(a_n(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ и из (21)-(22) получаем $\zeta_2^n(\varepsilon_1, \rho(\varepsilon_1)) = 0$, т.е. $\rho(\varepsilon_1) = \gamma_2^n(\varepsilon_1)$ для $\varepsilon_1 = (\delta_1^{n-1} - v_1, \delta_1^{n-1})$. Тем самым, $\mu_n = \delta_1^{n-1}$, $\gamma_2^n(\delta_1^{n-1} - 0) = (\gamma_2^n)'(\delta_1^{n-1} - 0) = 0$.

Так как $(\gamma_1^n)'(\varepsilon_1) < 0$ при $\varepsilon_1 \in (0, \delta_1^n]$, то существует предел $\gamma_1^n(+0)$. Предположим, что $\gamma_1^n(+0) = \alpha \ne \delta_2^n$. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} \zeta_1^n(\varepsilon_1, \gamma_1^n(\varepsilon_1)) = \zeta_2^n(0,\alpha) \ne 0$. С другой стороны $\zeta_1^n(\varepsilon_1, \gamma_1^n(\varepsilon_1)) \equiv 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} \zeta_1^n(\varepsilon_1, \gamma_1^n(\varepsilon_1)) = 0$. Поэтому $\gamma_1^n(+0) = \delta_2^n$. Из равенства $f_u'(u,\varepsilon) = \left[f_{1v}'(v,\varepsilon) f_{2u}'(u,\varepsilon)\right]_{v = f_2(u,\varepsilon)}$ и оценок (3), (6) получаем при $\varepsilon_2 > \delta_2^n / 2$ $f_u'(u,\varepsilon)\big|_{u=\varepsilon_1} \le M_2^2 (\delta_2^n / 2)^{\lambda_* - 1} \varepsilon_1^{\frac{\lambda}{\lambda_*}}$ и потому $\lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} f_u'(u, (\varepsilon_1, \gamma_1^n(\varepsilon_1)))\big|_{u=\varepsilon_1} = 0$.

Так как

$$(\zeta_1^n)'_{\varepsilon_1}(\varepsilon) = [(f^{n-1})'_v(v,\varepsilon)(f'_u(u,\varepsilon) + f'_{\varepsilon_1}(u,\varepsilon))|_{u=\varepsilon_1} + (f^{n-1})'_{\varepsilon_1}(v,\varepsilon)]_{v=f(\varepsilon_1,\varepsilon)} - \tilde{u}'_{\varepsilon_1}(\varepsilon),$$

$$(\zeta_1^n)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) = [(f^{n-1})'_v(v,\varepsilon) f'_{\varepsilon_1}(u,\varepsilon)|_{u=\varepsilon_1} + (f^{n-1})'_{\varepsilon_1}(v,\varepsilon)]_{v=f(\varepsilon_1,\varepsilon)} - \tilde{u}'_{\varepsilon_1}(\varepsilon),$$

$$(\zeta_2^n)'_{\varepsilon_k}(\varepsilon) = [(f^{n-1})'_v(v,\varepsilon) f'_{\varepsilon_k}(+0,\varepsilon) + (f^{n-1})'_{\varepsilon_k}(v,\varepsilon)]_{v=f(+0,\varepsilon)} - \tilde{u}'_{\varepsilon_k}(\varepsilon) \quad (k=1,2),$$

то $\lim\limits_{\varepsilon_1 \to +0} (\zeta_1^n)'_{\varepsilon_k}(\varepsilon_1, \gamma_1^n(\varepsilon_1)) = (\zeta_2^n)'_{\varepsilon_k}(0, \delta_2^n)$ $(k=1,2)$. Поэтому $(\gamma_2^n)'(0) = (\gamma_1^n)'(+0)$.

Возьмем $\mathrm{E}_0 := \{\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2 : \varepsilon_2 < \gamma_1^{n_-}(\varepsilon_1) \textit{ при } \varepsilon_1 > 0 \textit{ и } \varepsilon_2 < \gamma_2^{n_-}(\varepsilon_1) \textit{ при } \varepsilon_2 \le 0\}$ и будем теперь обозначать γ_i^n ($n \in \mathbf{N}$, $i = 1,2$) функцию, которую выше обозначали $\gamma_i^{n_-+n}$. При таком выборе E_0 и γ_i^n все утверждения теоремы доказаны.

Список литературы

1. **Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.** Теория бифуркаций // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / ВИНИТИ АН СССР. М., 1986. Т. 5. С. 1-218.
2. **Ноздрачева В. П.** Бифуркации особого цикла с двумя сепаратрисами // Интегральные и дифференциальные уравнения и приближенные решения: сб. научн. тр. / Калмыкский гос. ун-т. Элиста, 1985. С. 107-124.
3. **Овсянников И. М., Шильников Л. П.** О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса // Математический сборник. 1986. Т. 130. № 4. С. 552-570.
4. **Ройтенберг В. Ш.** О бифуркациях сепаратрис, асимптотических к сепаратрисному контуру // Методы качественной теории и теории бифуркаций: межвуз. сб. научн. тр. / под ред. Л. П. Шильникова; Горьк. гос. ун-т. Горький, 1989. С. 94-105.
5. **Ройтенберг В. Ш.** О бифуркациях сепаратрис, являющихся предельными к контуру из сепаратрис двух разноплановых седел // Математические методы в технике и технологиях: сб. трудов XXIV международной науч. конф. Киев: Национ. техн. ун-т Украины «КПИ», 2011. Т. 1. С. 10-11.

УДК 338.001.36
Экономические науки

Актуальность статьи обусловлена реформированием процесса подготовки и представления финансовой отчетности российских компаний, а также переходом от формирования финансовой отчетности по российским стандартам к финансовой отчетности по международным стандартам. В данной статье проводится сравнительный анализ некоторых основных показателей отчетности, подготовленной в соответствии с национальными и международными принципами.

Ключевые слова и фразы: сравнительный анализ; прибыль до налогообложения; прибыль от продаж; горизонтальный анализ; вертикальный анализ; факторный анализ.

Наталья Александровна Романова
Кафедра «Финансы и кредит»
Нижегородский институт управления (филиал)
Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
nromanova@inbox.ru

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ И СОСТАВА ФИНАНСОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПО РСБУ И МСФО©

Источником информации для анализа динамики и состава финансовых результатов служит отчет о прибылях и убытках (форма № 2) бухгалтерской отчетности. Горизонтальный анализ проводится на основе абсолютных и относительных показателей динамики прибыли до налогообложения и ее составляющих посредством применения аддитивной модели:

$$Рб = Pp + Dnp - Snp$$

где Рб - прибыль (убыток) до налогообложения; Рр - прибыль (убыток) от продаж; Dпр - прочие доходы; Sпр - прочие расходы.

Анализ состава прибыли до налогообложения (100%) (РСБУ) в динамике показан в Таблице 1, где приведена информация отчета о прибылях и убытках (форма № 2).

Из Таблицы 1 видим, что прибыль организации в отчетном году увеличилась на 29 тыс. руб., или на 15,1%.

В базисном году на долю прибыли от продаж приходились 52,08% прибыли, 47,92% прибыли до налогообложения составили положительное сальдо прочих доходов и расходов. В отчетном году удельный вес сальдо

© Романова Н. А., 2012