Пыркова Ольга Анатольевна

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СМЕЩЕНИЯ ЛИНИИ ТОКА

В статье приводится решение неоднородного уравнения Гельмгольца для вертикального смещения линии тока с помощью функции Грина, удовлетворяющей принципу причинности. Основное внимание в работе автор акцентирует на вкладе в решение первых угловых гармоник при отсутствии завихренности в стратифицированном потоке. Распределение силовых источников, моделирующих цилиндр, выбирается из выполнения условия непротекания на его поверхности.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/8/44.html

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 8 (63). C. 137-141. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/8/

8. **Родионов Ю. В., Попов В. В., Шестаков В. Е., Максимов В. А.** К вопросу выбора вакуумных насосов для доильных установок // IX научная конференция: пленарные доклады и краткие тезисы. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. Ч. 1. С. 294.
9. **Родионов Ю. В., Селиванова П. И., Волков А. В.** Способ регулирования эксцентриситета в жидкостнокольцевых вакуум-насосах // Международная научно-практическая конференция «Составляющие научно-технического прогресса»: сборник научных статей. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006, С. 88-90.
10. **Сушка пищевых растительных материалов** / Г. К. Филоненко и др. М: Изд-во «Пищевая промышленность», 1971. 440 с.
11. **Шацкий Д. А.** Совершенствование конструкции конвективной вакуум-импульсной сушки плодово-ягодного сырья: дисс. … магистра по программе 150400.22. Тамбов, 2011. 79 с.

УДК 532.59
Физико-математические науки

В статье приводится решение неоднородного уравнения Гельмгольца для вертикального смещения линии тока с помощью функции Грина, удовлетворяющей принципу причинности. Основное внимание в работе автор акцентирует на вкладе в решение первых угловых гармоник при отсутствии завихренности в стратифицированном потоке. Распределение силовых источников, моделирующих цилиндр, выбирается из выполнения условия непротекания на его поверхности.

Ключевые слова и фразы: уравнение Гельмгольца; функция Грина; вертикальное смещение линии тока; задача Дирихле; задача Неймана.

Ольга Анатольевна Пыркова, к. физ.-мат. н., доцент
Кафедра высшей математики
Московский физико-технический институт (государственный университет)
opyr@mail.ru

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ СМЕЩЕНИЯ ЛИНИИ ТОКА©

Для вертикального смещения линии тока $\overline{\xi}$ было получено неоднородное уравнение Гельмгольца [5]:

$$\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\,\overline{x}^2}+\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial\,\overline{y}^2}+k_0{}^2a^2\overline{\xi}=\overline{f}_y+\overline{\Omega}_0 \qquad (1)$$

с граничным условием типа Дирихле:

$$\overline{\xi}=\sin\theta \qquad (2)$$

Здесь: $\overline{x}=\dfrac{x}{a}$, $\overline{y}=\dfrac{y}{a}$ - безразмерные горизонтальная и вертикальная, соответственно, координаты точки; a - радиус обтекаемого цилиндра; $k_0=\dfrac{N}{U_0}$, где U_0 - скорость набегающего невозмущенного потока, а $N^2=-\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{\partial\,\rho_0}{\partial\,y}$ частота Брента-Вяйсяля; $\overline{f}_y$ - силовые источники, моделирующие цилиндр [4].

Решение уравнения (1) может быть представлено через функцию Грина [3], удовлетворяющую принципу причинности [2; 4; 6]. Завихренность в потоке представляется в виде суперпозиции завихренности в следе и завихренности около обтекаемого цилиндра, выражение для которой можно представить в виде разложения в ряд по синусам. Распределение силовых источников, моделирующих цилиндр, выбирается исходя из выполнения условия непротекания на его поверхности с учетом влияния завихренности.

Функция Грина для краевой задачи с однородными краевыми условиями [3]. Линейная краевая задача

$$L\Phi(x)=f(x)\quad(x\in V) \qquad (3a)$$

$$B_i\Phi(x)=0\quad(i=1,2,\ldots,N;\ x\in S) \qquad (3b)$$

представляет данную функцию $f(x)$ как результат линейной операции L над неизвестной функцией $\Phi(x)$ в области V, удовлетворяющей заданным краевым условиям (3b) на ее границе S. Если возможно записать соответствующую *обратную операцию* в форме линейного интегрального преобразования

$$\Phi(x)=\int_V G(x,\eta)\,f(\eta)\,dV(\eta) \qquad (4)$$

для каждой возможной $f(x)$, то ядро $G(x,\eta)$ называют ***функцией Грина для данной краевой задачи*** (3).

$G(x,\eta)$ должна удовлетворять однородным краевым условиям (3b) вместе с условиями

$$\left.\begin{aligned} &LG(x,\eta)=0, \quad (x,\eta\in V;\ x\neq\eta)\\ &\int_V LG(x,\eta)dV(\eta)=1 \quad (x\in V)\end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Или

$$LG(x,\eta)=\delta(x,\eta) \ (x,\eta\in V) \tag{5b}$$

где $\delta(x,\eta)$ есть дельта-функция в *системе координат, в которой поставлена краевая задача*.

Формула (4) представляет решение $\Phi(x)$ краевой задачи (3) как суперпозицию элементарных решений $G(x,\eta)f(\eta)$, имеющих особенность при $x=\eta$. Эти элементарные решения могут быть интерпретированы, как точечные источники $f(\eta)\delta(x,\eta)$ в точке $x=\eta$. Функция Грина часто может быть найдена непосредственным интегрированием «символического дифференциального уравнения» (5b) с данными краевыми условиями соответствующими методами.

Метод функции Грина для неоднородных краевых условий. Решение $\Phi(x)$ трехмерной линейной краевой задачи

$$L\Phi(x)=0 \quad (x\in V) \quad \mathbf{B}\Phi(x)=b(x) \quad (x\in S) \tag{6}$$

часто может быть записано в форме поверхностного интеграла

$$\Phi(x)=\int_S G_S(x,\eta)b(\eta)dA(\eta) \tag{7}$$

для каждой заданной функции $b(x)$, интегрируемой на *S*. $G_S(x,\eta)$ должна удовлетворять данному дифференциальному уравнению при $x\in V$, $\eta\in S$ и

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{B}G_S(x,\eta)=0 \quad (x,\eta\in S;\ x\neq\eta)\\ &\int_S \mathbf{B}G_S(x,\eta)dA(\eta)=1\end{aligned}\right\}$$

$G_S(x,\eta)$ называют либо функцией Грина второго рода, либо просто функцией Грина. Аналогичные соотношения имеют место и в *двумерном случае*.

Линейные краевые задачи для неоднородных дифференциальных уравнений, так же как и при неоднородных краевых условиях, могут быть часто решены *суперпозицией объемного* (4) и *поверхностного* (7) *интегралов*.

Каждая краевая задача (6) может быть сформулирована как краевая задача типа (3). Отсюда следует, что $G_S(x,\eta)$ *может быть выражена через обычную функцию Грина* $G(x,\eta)$, *определенную для задачи с «дополнительными» однородными краевыми условиями*. В частности, рассмотрим двумерную или трехмерную краевую задачу для действительного самосопряженного дифференциального уравнения вида

$$L\Phi(x)\equiv-\left[\nabla^2+q\right]\Phi(x)=0 \ (x\in V) \tag{8}$$

где $q=q(x)$ - действительная дифференцируемая функция. Если $G(x,\eta)$ - функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$-\left[\nabla^2+q\right]G(x,\eta)=\delta(x,\eta) \tag{9}$$

при заданных однородных краевых условиях (3), то формула Грина

$$\int_V(vLu-uLv)dV=-\int_S(v\nabla u-u\nabla v)d\mathbf{A}=-\int_S\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dA$$

дает

$$\Phi(x)=\int_S\left[G(x,\eta)\frac{\partial\Phi(\eta)}{\partial\nu}-\Phi(\eta)\frac{\partial G(x,\eta)}{\partial\nu}\right]dA(\eta) \ (x\in V)$$

где символ $\frac{\partial}{\partial\nu}$ обозначает производную по нормали. Отсюда для краевых условий первого рода, вида

$$\mathbf{B}\Phi(x)\equiv\Phi(x)=b(x) \ (x\in S)$$

(т.е. для условий Дирихле) решение (7) приводит к соотношению

$$G_S(x,\eta)=-\frac{\partial G(x,\eta)}{\partial\nu} \ (\eta\in S)$$

где $G(x,\eta)$ удовлетворяет в области *V* уравнению (9) и обращается в нуль на ее границе *S*.

Для краевых условий второго рода (задача Неймана)

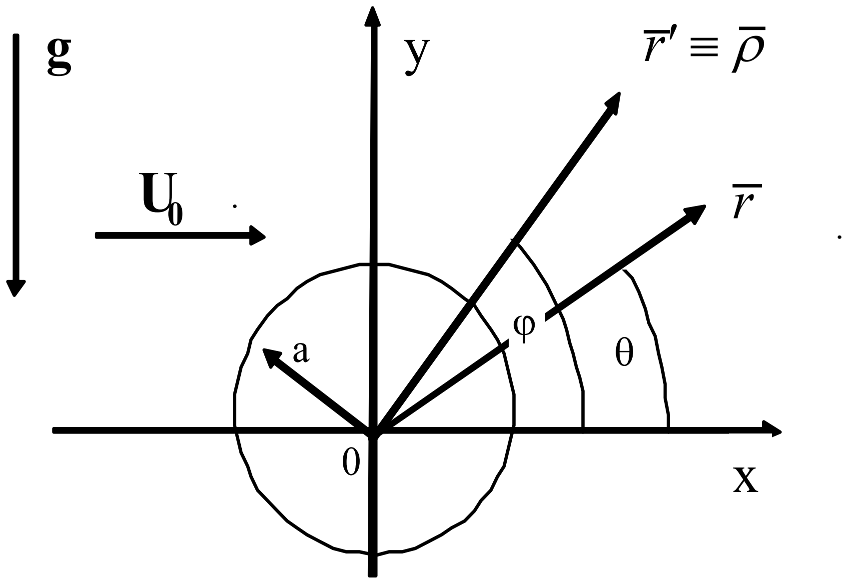
$$\mathbf{B}\Phi(x) \equiv \frac{\partial \Phi(x)}{\partial n} = b(x) \quad (x \in S)$$

решение (7) дифференциального уравнения (8) сводится к использованию «функции Неймана»

$$G_S(x,\eta) = G(x,\eta) \quad (\eta \in S)$$

которая удовлетворяет уравнению (9) и $\frac{\partial G(x,\eta)}{\partial n} = 0$ на *S*.

Функция Грина для задачи об обтекании цилиндра стратифицированным потоком. Решение задачи для возникающего возмущения во внутренней волне, образующейся за цилиндром, можно записать в виде свертки с функцией Грина [Там же]:



$$\overline{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \overline{\Pi}_{\xi}(\overline{\rho},\varphi') G'(\overline{r}-\overline{\rho}) dx'dy' \tag{10}$$

Здесь $\overline{\Pi}_{\xi} = \overline{\Pi}_1 + \overline{\Pi}_2$, где $\overline{\Pi}_1 = \overline{f}_y$, $\overline{\Pi}_2 = \overline{\Omega}_0$, $G'(\overline{r}-\overline{r}')$ - функция Грина для двухмерного оператора Гельмгольца:

$$\Delta G' + (k_0 a)^2 G' = \overline{\delta}(\overline{R}) \tag{11}$$

где Δ - оператор Лапласа, $R = |\overline{r} - \overline{\rho}|$, для однозначного решения задачи используется функция Грина, удовлетворяющая принципу причинности.

В работе [6] функция Грина для полупространства определяется из уравнения:

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(R) \tag{12}$$

и, согласно общепринятой гипотезе, что не должно быть распространения возмущений вверх по потоку, удовлетворяющая граничным условиям:

$$G = 0 \qquad (y = 0)$$

$$G = \mathrm{o}\left(1/\sqrt{r}\right) \qquad \left(\mathrm{r}\to\infty,\ \frac{1}{2}\pi<\theta<\pi\right) \tag{13}$$

Здесь

$$R = |\overline{r}-\overline{\rho}| = \left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]^{1/2} = \left[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)\right]^{1/2}$$

Таким образом, устанавливается следующее соответствие между используемыми в настоящей работе обозначениями и аналогичными в работе [Ibidem]: $G© = -G$, $\overline{r}© = \rho$.

Решение [Ibidem] ищется как функция от обратной величины числа Фруда $k = \frac{1}{F} = \frac{Na}{U}$ в области $0 < k < k_c$, где k_c минимальная величина k, для которой неустойчивость возникает в одной или нескольких точках в потоке (неустойчивость по отношению к вертикальным движениям способствует развитию перемешивания и тенденции к большей однородности), то есть до которой справедлива модель Лонга (двумерное невязкое стратифицированное по вертикали течение, в котором действующие вверх по потоку градиенты плотности и давления считаются постоянными). Возможно также, что неустойчивость может носить локальный характер, и что в некоторой конечной области $k > k_c$ может сохраниться хорошо установившаяся картина подветренных волн, но не следует надеяться, что модель Лонга обеспечит надежное описание волновой картины и амплитуд внутренних волн в этой области. Однако следует отметить, что в реальном потоке нарушение устойчивости может иметь место и при $k < k_c$ из-за действия сил вязкости. Учеником Майлса Хаппертом получено критическое значение обратной величины числа Фруда $k_c = 1.27$ [Ibidem].

Функция Грина [Ibidem] имеет следующий вид:

$$G(r,\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n(\rho,\phi) J_n(kr) - J_n(k\rho) Y_n(kr) \sin(n\phi)\right] \sin(n\theta)$$

$$(\rho \le r)$$

$$\psi_n(\rho,\phi) = \sum_{q=1}^{\infty} b_{nq} J_q(k\rho) \sin(q\phi)$$

$$b_{nq} = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\frac{n}{q^2 - n^2} & n \text{ - четное}, q \text{ - нечетное} \\ \frac{4}{\pi}\frac{q}{q^2 - n^2} & n \text{ - нечетное}, q \text{ - четное} \\ 0 & (n-q) \text{ - четное} \end{cases}$$

В работе [4] рассматривается задача о равномерном горизонтальном движении цилиндра в однородно стратифицированной $(N{=}const)$ идеальной несжимаемой жидкости. Действие цилиндра на жидкость моделируется действием силовых источников, распределенных по его поверхности. Причем, если отбор подходящей функции Грина в [6] проводился на основе «условия излучения» $G = o\left(1/\sqrt{r}\right)$ вверх по потоку, то здесь, благодаря «причинному» характеру функции Грина, оно выполняется автоматически. Сравнивая обозначения в (10)÷(13) с работой [4], имеем:

$$\underline{\bar r > \bar r'} \quad G'^{+}(\bar r,\bar r') = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} J_n(k_0 a\bar r') Y_n(k_0 a\bar r) \sin(n\varphi') - \\ J_n(k_0 a\bar r) \sum\limits_{q=1}^{\infty} b_{nq} J_q(k_0 a\bar r') \sin(q\varphi') \end{matrix}\right] \sin(n\varphi)$$

$$\underline{\bar r < \bar r'} \quad G'^{-}(\bar r,\bar r') = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} J_n(k_0 a\bar r) Y_n(k_0 a\bar r') \sin(n\varphi') - \\ J_n(k_0 a\bar r) \sum\limits_{q=1}^{\infty} b_{nq} J_q(k_0 a\bar r') \sin(q\varphi') \end{matrix}\right] \sin(n\varphi)$$

Вклад от обтекания цилиндра при больших числах Фруда $\left(Fr = \dfrac{\mathbf{U}_0}{N\,a}\right)$ с хорошей точностью моделируется суммой первых двух угловых гармоник [Там же]:

$$f(\varphi) = f_1 \sin\varphi + f_2 \sin(2\varphi) \tag{14}$$

Тогда функция Грина приобретает вид:

при $\underline{\bar r > \bar r'}$

$$G'^{+} = J_1(k_0 a\bar r') Y_1(k_0 a\bar r) \sin\varphi' \sin\varphi - \sum_{n_1=1}^{\infty} J_{2n_1}(k_0 a\bar r) \frac{4}{\pi}\frac{2n_1}{1-4n_1^2} J_1(k_0 a\bar r') \sin\varphi' \sin(2n_1\varphi) +$$

$$+ J_2(k_0 a\bar r') Y_2(k_0 a\bar r) \sin 2\varphi' \sin 2\varphi - \sum_{n_2=1}^{\infty} J_{2n_2}(k_0 a\bar r) \frac{4}{\pi}\frac{2\sin 2\varphi'}{4-(2n_2-1)^2} J_2(k_0 a\bar r') \sin(2n_2 - 1)\varphi$$

При этом для отклонения линии тока (без учета завихренности) получаем:

$$\bar\xi(\bar r,\varphi) = \bar\xi^f(\bar r,\varphi) = \int_0^\infty\int_0^\pi f_y G'(\bar r,\bar r',\varphi,\varphi') \bar r' d\bar r' d\varphi' = \int_0^\infty\int_0^\pi [f_1 \sin\varphi + f_2 \sin 2\varphi] \delta(\bar r' - 1) G'(\bar r,\bar r',\varphi,\varphi') \bar r' d\bar r' d\varphi' =$$

$$= \int_0^\pi [f_1 \sin\varphi + f_2 \sin 2\varphi] G'(\bar r,1,\varphi,\varphi') d\varphi' =$$

$$= f_1 \begin{bmatrix} J_1(k_0 a) Y_1(k_0 a\bar{r}) \sin\varphi - \\ -\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(k_0 a\bar{r}) J_1(k_0 a) \frac{4}{\pi} \frac{2n}{1-4n^2} \sin 2n\varphi \end{bmatrix} \int_0^{\pi} \sin^2\varphi' d\varphi' + \tag{15}$$

$$+ f_2 \begin{bmatrix} J_2(k_0 a) Y_2(k_0 a\bar{r}) \sin 2\varphi - \\ -\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(k_0 a\bar{r}) J_2(k_0 a) \frac{4}{\pi} \frac{2}{4-(2n-1)^2} \sin(2n-1)\varphi \end{bmatrix} \int_0^{\pi} \sin^2 2\varphi' d\varphi' =$$

$$= f_1 \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} J_1(k_0 a) Y_1(k_0 a\bar{r}) \sin\varphi - \\ -\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(k_0 a\bar{r}) J_1(k_0 a) \frac{8n}{\pi(1-4n^2)} \sin 2n\varphi \end{bmatrix} +$$

$$+ f_2 \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} J_2(k_0 a) Y_2(k_0 a\bar{r}) \sin 2\varphi - \\ -\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(k_0 a\bar{r}) J_2(k_0 a) \frac{8}{\pi\left(4-(2n-1)^2\right)} \sin(2n-1)\varphi \end{bmatrix}$$

И так как при больших числах Фруда имеют место следующие приближенные соотношения [1]:

$$J_m(z) \approx \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)};\; Y_m(z) \approx -\frac{\Gamma(m)}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^m;\; \Gamma(m+1) = m!$$

то

$$J_1(k_0 a) \approx \frac{k_0 a}{2};\; Y_1(k_0 a\bar{r}) \approx -\frac{1}{\pi}\frac{2}{k_0 a\bar{r}}$$

$$J_1(k_0 a) Y_1(k_0 a\bar{r}) \approx -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\bar{r}};\; J_1(k_0 a) J_2(k_0 a\bar{r}) \approx \frac{(k_0 a)^3}{8}\bar{r}^2$$

$$J_2(k_0 a) Y_2(k_0 a\bar{r}) \approx -\frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\bar{r}^2};\; J_2(k_0 a) J_1(k_0 a\bar{r}) \approx \frac{(k_0 a)^3}{8}\bar{r}$$

Окончательно для смещения линии тока (15) с учетом первых двух гармоник (14) и без учета завихренности в стратифицированном потоке получается решение в виде:

$$\bar{\xi}^f(\bar{r},\varphi) = -f_1 \frac{1}{2\bar{r}} \sin\varphi + f_1 \frac{(k_0 a)^3}{6} \bar{r}^2 \sin 2\varphi - f_2 \frac{1}{4\bar{r}^2} \sin 2\varphi - f_2 \frac{(k_0 a)^3}{6} \bar{r} \sin\varphi$$

При больших числах Фруда условие непротекания (2) на поверхности цилиндра выполняется при следующем распределении силовых источников, моделирующих цилиндр:

$$f_1 = -2;\; f_1 \frac{(k_0 a)^3}{3} \approx \frac{f_2}{2}$$

Список литературы

1. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
2. **Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В.** Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью. М.: ИПМ АН СССР, 1983. Препринт № 282. 59 с.
3. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
4. **Городцов В. А., Теодорович Э. В.** Обтекание цилиндра потоком однородной стратифицированной жидкости // Современные вопросы механики сплошной среды: междувед. сборник. М.: Изд. МФТИ, 1985. С. 75-81.
5. **Пыркова О. А.** Сведение системы уравнений обтекания цилиндра к уравнению для вертикального отклонения линии тока в плоском случае // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2011. № 2 (45). С. 46-49.
6. **Miles J. W., Hupper H. E.** Lee Waves in a Stratified Flow. Part 2. Semi-Circular Obstacle // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 33. №. 4. P. 803-814.