Сысолятина Лидия Геннадьевна

ЗАДАЧА МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ: МЕТОД НЬЮТОНА

Статья раскрывает методику решения задачи многомерной оптимизации с использованием различных информационных технологий: Excel, MathCAD, Turbo-Pascal. Непосредственное решение задачи позволяет вникнуть в структуру метода, а ее численная реализация представляет принцип работы распространенных программных средств, решающих задачи оптимизации.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 8 (63). C. 151-155. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/8/

УДК 519.6
Физико-математические науки

Статья раскрывает методику решения задачи многомерной оптимизации с использованием различных информационных технологий: Excel, MathCAD, Turbo-Pascal. Непосредственное решение задачи позволяет вникнуть в структуру метода, а ее численная реализация представляет принцип работы распространенных программных средств, решающих задачи оптимизации.

Ключевые слова и фразы: многомерная оптимизация; метод Ньютона; блок-схема алгоритма; локальный минимум; программирование; *Pascal*; *Excel*; *MathCAD*.

Лидия Геннадьевна Сысолятина
Кафедра информатики
Курганский государственный университет
Sysolyatina.lidia@yandex.ru

ЗАДАЧА МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ: МЕТОД НЬЮТОНА©

Задачи оптимизации очень распространены в практической деятельности человека. Оптимизационные модели строятся при решении инженерных, финансовых и статистических вопросов.

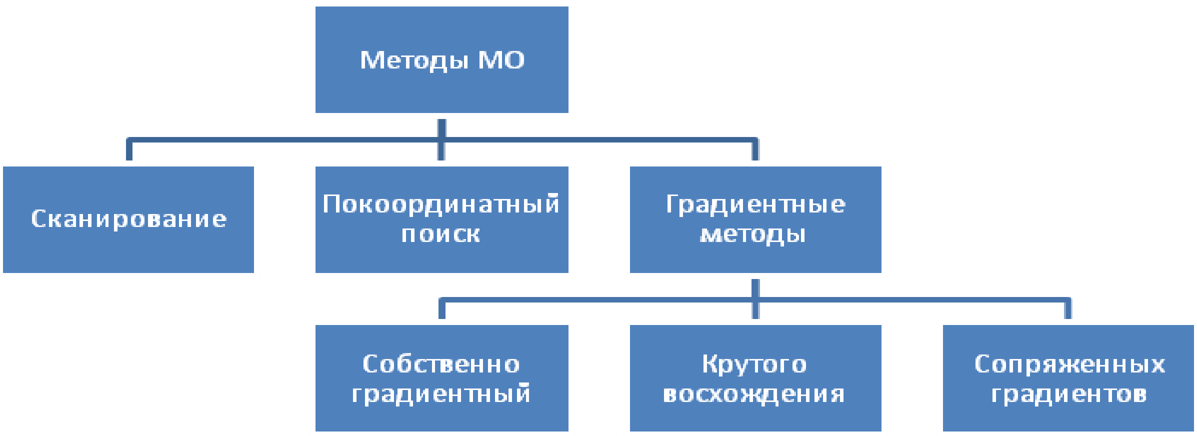
Задачей оптимизации в математике называется задача о нахождении экстремума (минимума или максимума) вещественной функции в области.

$$F(\vec{x}) = F(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow extr$$

Классификация методов решения оптимизационной задачи

Существуют различные методы решения данной задачи. Оптимизационные методы делятся на следующие группы: аналитические методы (например, метод множителей Лагранжа); численные методы; графические методы.

При нахождении экстремума вещественной функции в n-мерном пространстве применение графических методов невозможно (в силу невозможности графической интерпретации n-мерного пространства), а аналитические методы, как правило, требуют помимо исследуемой функции указания дополнительных сведений. Поэтому в n-мерном пространстве решение задачи происходит численными методами. Численные методы многомерной оптимизации (МО), в свою очередь, могут быть классифицированы следующим образом:



Методы многомерной оптимизации связаны с поиском экстремума целевой функции без перебора всего множества возможных значений ее.

Последовательность точек $\left\{\vec{x}^0, \vec{x}^1, \vec{x}^2, ..., \vec{x}^k\right\}$, для которых $F(\vec{x}^j)$ лучше $F(\vec{x}^{j-1})$, которые будут перебраны до нахождения экстремума функции, называется *траекторией поиска*. Количество k поисковых «шагов» (т.е. длина траектории поиска), определяет эффективность метода оптимизации.

Метод Ньютона

Опишем метод Ньютона в общем виде.

$f(x) \to \min; \quad x \in X$

Где $f(x) \in C^2(X)$ (множество дважды непрерывно дифференцируемых функций в n-мерном пространстве), X - выпуклое замкнутое множество E^n.

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^{\mathrm{T}} \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x_k) \Delta x + 0\left(\Delta x^3\right)$$

Отбрасывая все члены разложения третьего порядка и выше, получим квадратичную аппроксимацию $f(x)$:

$$F_k = f(x_k) + \nabla f(x_k)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2} \Delta x^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x_k) \Delta x$$

Используя квадратичную аппроксимацию функции $f(x)$, сформируем последовательность итераций таким образом, чтобы в точке x_{k+1} градиент аппроксимирующей функции обращается в ноль (в соответствии с необходимым условием экстремума первого порядка):

$$\nabla F_k = \nabla f(x_k) + \nabla^2 (x_k) \Delta x = 0$$

Следовательно, $\Delta x = -\left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1} \cdot \nabla f(x_k)$

Последовательно применяя квадратичную аппроксимацию, построим последовательность $\{x_k\}$ в соответствии с правилом

$$x_{k+1} = x_k - \left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1} \cdot \nabla f(x_k)$$

При выполнении требования

$$H(x_k) = \nabla^2 f(x_k) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} > 0,$$

последовательность $\{x_k\}$ является последовательностью точек минимумов квадратичных функций F_k, $k = 0,\ 1, \ldots$

Чтобы обеспечить выполнение требования $f(x_{k+1}) < f(x_k), k = 0,1,\ldots$ для тех случаев, когда матрица Гессе $H(x_k)$ не окажется положительно определенной, рекомендуется для соответствующих значений k вычислить точку по методу градиентного спуска $x_{k+1} = x_k - t_k \nabla f(x_k)$ с выбором величины шага из условия $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

Построение последовательности $\{x_k\}$ заканчивается в точке x_k, для которой $\left\|\nabla f(x_k)\right\| < \varepsilon_1$, где ε_1 - заданное малое положительное число, или $k>M$, где M - предельное число итераций, или при двукратном одновременном выполнении двух неравенств $\left\|x_{k+1} - x_k\right\| \le \varepsilon_2$, $\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| < \varepsilon_2$, где - малое положительное число.

В данной работе процесс оптимизации методом Ньютона представлен различными средствами на конкретном примере.

Постановка задачи. Найти точку локального минимума, используя метод Ньютона, для функции $f(x, y) = x^3 + 3x \cdot y^2 - 15x - 12y$.

В работе представлено теоретическое описание метода Ньютона, а также составлена блок-схема алгоритма решения. Метод Ньютона является градиентным методом второго порядка, применяет квадратичную аппроксимацию, что позволяет повысить скорость сходимости (достаточно высокой) одинаковые решения. В ходе работы были получены следующие выводы: для решения задачи многомерной оптимизации существует множество методов, различных по ресурсоемкости и по основной идее. Метод Ньютона занимает среди них важное место, позволяет быстро найти решение задачи. Однако при увеличении количества переменных и усложнением функции возникают сложности с вычислением матрицы Гессе. Тем не менее, современные компьютерные технологии позволяют быстро найти решение. Многие компьютерные программы, решающие задачу оптимизации, построены на основе метода Ньютона. Роль метода Ньютона велика: большинство наиболее эффективных методов в линейном и нелинейном программировании строятся на его основе.

Решение задачи средствами программы *MathCAD*

Решение поставленной задачи с помощью специальной функции *MathCAD Minimize*, выбрав метод Ньютона в свойствах функции

$$x := 1.5 \quad y := 0.6$$

$$g(x,y) := x^3 + 3x \cdot y^2 - 15x - 12y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(g, x, y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g(x,y) = -28$$

Ниже приведено решение задачи по предложенному алгоритму (см. Приложение А) без написания программы решения, с использованием средств *MathCAD*.

$$\varepsilon 1 := 0.1 \quad \varepsilon 2 := 0.15$$

$$M := 6 \quad g(x,y) := x \cdot x \cdot x + 3 \cdot x \cdot y \cdot y - 15 \cdot x - 12 \cdot y$$

$$\frac{d}{dx} g(x,y) \to 3 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2 - 15 \qquad \frac{d}{dy} g(x,y) \to 6 \cdot x \cdot y - 12$$

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x,y) \to 6 \cdot x \qquad \frac{d^2}{dy^2} g(x,y) \to 6 \cdot x \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy} g(x,y)\right) \to 6 \cdot y$$

$$x1 := 1.5 \quad y1 := 0.6$$

В результате трех итераций получаем следующие результаты:

третья итерация

$$x1 := x2 \qquad y1 := y2$$

$$a1 := (x1 \ \ y1) \qquad a1 = (2.003 \ \ 1.003)$$

$$g(x1, y1) = -28$$

$$grad := \left(3 \cdot x1^2 + 3 \cdot y1^2 - 15 \ \ 6 \cdot x1 \cdot y1 - 12\right)$$

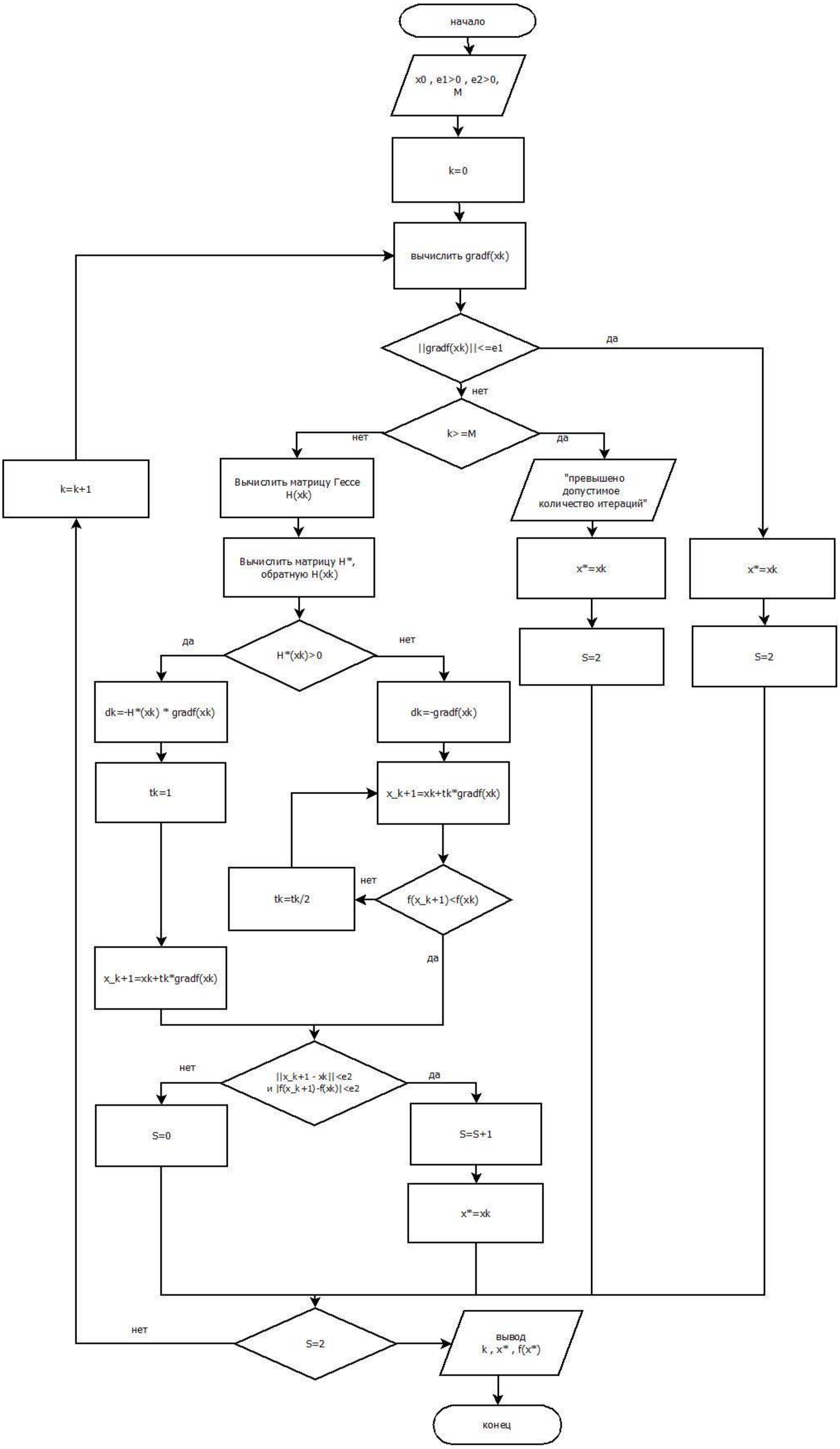
$$grad = (0.053 \ \ 0.052)$$

$$\mathrm{norme}(grad) \to 7.42064136244943220058 \cdot 10^{-2} = 0.074 \ \ <0.1$$

$$x1 = 2.003 \qquad y1 = 1.003 \qquad g(x1, y1) = -28$$

Многие компьютерные программы, решающие задачу оптимизации, построены на основе метода Ньютона: в программах *Excel* и *MathCAD Minimize* и *Maximize* предусмотрен выбор метода (метод Ньютона или сопряженных градиентов). Выполняя лабораторные работы по МО, студенты достаточно полно и всесторонне осваивают метод, который в практической деятельности вполне реализуем.

Приложение А



Список литературы

1. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
2. **Образовательный математический сайт. Рубрика Р. И. Ивановского, Санкт-Петербургский государственный университет. Функции *Minimize* и *Maximize*** [Электронный ресурс]. URL: http://www.nsu.ru/matlab/Exponenta_RU/soft/Mathcad/ivanovsky/minimize/minimize.asp.htm (дата обращения: 20.01.2011).

УДК 008
Культурология

Статья акцентирует внимание на реализации «русской идеи» в практике российского брендинга, указывает на актуальность данной проблемы. Автор объясняет причины поиска современным российским человеком путей своей реализации, а также проблему выбора между западноевропейскими ценностями и православными. Рассматривается данная проблема на примере формирования российского бренда.

Ключевые слова и фразы: «русская идея»; культура Запада; самобытность русской культуры; брендинг; российский бренд; постиндустриальное общество.

Грета Леоновна Терехова, к. филос. н., доцент
Кафедра истории и философии
Тамбовский государственный технический университет
radagl1960@yandex.ru

«РУССКАЯ ИДЕЯ» В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ СОВРЕМЕННОГО РОССИЙСКОГО БРЕНДА©

Проблема пути развития России, поставленная в русской культуре еще несколько веков назад, сегодня приобрела еще больший масштаб и остроту. Решение этой проблемы предполагает реализацию всех сфер нашей жизни на всем жизненном пространстве. В среде русской интеллигенции XIX века тема эта была одной из центральных. Почему именно в XIX веке эта проблема приобретает такую актуальность? Со времен принятия Православия до Петра I эта проблема не стояла перед русским народом. Путь был выбран. Конечно, средства его реализации не всегда соответствовали тем духовным нормам, которое предполагало христианство. Людьми могущественными вера нередко использовалась как инструмент политической игры, как возможность управлять не только телом человека, но и его душой. Но основная идея христианства, ведущая к спасению, была привита русскому народу.

В XVIII веке волны Реформации прошлись по Европе. В России Церковь пережила болезненный раскол. За сердца людей боролся католицизм, вольнодумные протестантские идеи. Поднявшийся на волне антикатолического движения, протестантизм отметал многое - церковную иерархию, большинство таинств, почитание святых, икон и мощей, алтари, иконостасы и благоукрашение, не признавал монашество.

Россия в те времена давала не самое лучшее образование. Все последние достижения науки и техники - за границей. И чтобы получить образование в лучших университетах Европы, надо было поступить в Иезуитский коллегиум. Только для этого надо было отказаться от семейной веры, от Православия.

В XVIII веке, «когда Петр отправлял молодых дворян - великовозрастных недорослей - в чужую страну «уму набираться» и «знаниями ко благу государства богатеть, для многих чад это была не возможность «мир посмотреть - себя показать», а скорее «жуткое надругательство государя» и «попытка разрушить моральные устои дворянских семей». Плач стоял по всей Москве» [1, с. 31].

Постепенно светское общество и наука теряли преемственность с русской религиозной духовной практикой, что привело к потере целостности человека и, как следствие, поиску новых средств самоосуществления. В состоянии поиска русский народ находится уже четвертый век: атеизм, язычество, восточные веяния в виде различных верований, христианские ереси, новейшие политические, экономические и философские идеи разрывают его духовное тело.

Самореализация человека в постсоветском пространстве, как мы уже заметили, осуществляется под воздействием вышеперечисленных причин и под превалирующим влиянием западноевропейского рационализма и прагматизма. Меняются духовные ценности, и это приводит к изменению всей окружающей действительности. Это проявляется во всем: в оформлении внешности, окружающего пространства, во взаимоотношениях людей. В оформлении пространства первостепенную роль играет архитектура, сегодня еще и наружная реклама. Для того, чтобы сохранить гармонию всего пространства и сохранить рекламу, необходимо иметь знание об основных законах гармонии. В силу этого нужно учитывать немаловажный закон: реклама должна вписываться в окружающий ландшафт, архитектурные ансамбли, в традиционный стиль народа, чтобы вызывать у человека ответную душевную реакцию, которая кроется на глубине его психического устроения. А это ведь, в
