

Ипатова Валентина Михайловна

СУЩЕСТВОВАНИЕ АТТРАКТОРА ЯВНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ

В статье рассматривается двухслойная квазигеострофическая модель общей циркуляции атмосферы с зависящей от времени правой частью. Уравнения модели аппроксимируются явной (по времени) спектрально-разностной схемой. Доказывается, что при достаточно малых шагах сетки схема имеет локальный равномерный аттрактор. Область притяжения аттрактора схемы бесконечно расширяется при стремлении параметра дискретизации к нулю.

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2012/9/24.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2012. № 9 (64). С. 86-89. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/9/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

УДК 517.95; 519.6

Физико-математические науки

В статье рассматривается двухслойная квазигеострофическая модель общей циркуляции атмосферы с зависящей от времени правой частью. Уравнения модели аппроксимируются явной (по времени) спектрально-разностной схемой. Доказывается, что при достаточно малых шагах сетки схема имеет локальный равномерный аттрактор. Область притяжения аттрактора схемы бесконечно расширяется при стремлении параметра дискретизации к нулю.

Ключевые слова и фразы: аттрактор; равномерный аттрактор неавтономной системы; модель общей циркуляции атмосферы; спектрально-разностная схема.

Валентина Михайловна Ипатова, к.ф.-м.н., доцент

Кафедра высшей математики

Московский физико-технический институт

ipatval@mail.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ АТТРАКТОРА ЯВНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ[©]

Работа выполнена при поддержке ФЦП

«Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

Многие природные объекты (в том числе атмосфера Земли) представляют собой хаотические системы. Исследование их предсказуемости требует глубокого изучения динамики системы на основе описания её минимального равномерно притягивающего множества, которое принято называть аттрактором. Большая сложность моделей геофизической гидродинамики не позволяет найти их аттракторы в явном виде, в связи с этим представляет интерес исследование аттракторов их дискретных аппроксимаций. В настоящей работе изучается вопрос о существовании равномерного аттрактора явной спектрально-разностной схемы для двухслойной квазигеострофической модели общей циркуляции атмосферы с зависящей от времени правой частью. Явная схема наиболее проста и удобна для программирования, однако она не обладает свойством глобального притяжения. Тем не менее, удастся показать, что при достаточно малых шагах сетки возникает локальный аттрактор схемы, область притяжения которого бесконечно расширяется при стремлении параметра дискретизации к нулю.

1. Семейства полупроцессов и их аттракторы

Определим понятия семейств полупроцессов и их аттракторов, придерживаясь терминологии, принятой в [2; 4-8; 10-11].

Пусть E - полное метрическое пространство с метрикой $\text{dist}_E(\cdot, \cdot)$; $\mathcal{T}$ - нетривиальная подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \cap [0, +\infty)$ - полугруппа неотрицательных элементов из $\mathcal{T}$. Например, $\mathcal{T}_+ = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ для систем с непрерывным временем, $\mathcal{T}_+ = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\mathcal{T}_+ = \mathbb{Z}_+ \tau = \{0, \tau, 2\tau, \dots\}$, где $\tau > 0$, для систем с дискретным временем. Пусть при всех $h \in \mathcal{T}_+, t \in \mathcal{T}_+, t \geq h$ на E определены непрерывные операторы $U(t, h) : E \rightarrow E$ такие, что $U(t, s)U(s, h) = U(t, h) \quad \forall t, s, h \in \mathcal{T}_+ : t \geq s \geq h$. Тройку $\{U, \mathcal{T}_+, E\}$ будем называть *полупроцессом*. Рассмотрим семейства операторов $U_f(t, h)$, функционально зависящие от символа $f = f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты и члены в правой части уравнения. Пусть F - некоторое множество символов и каждому $f \in F$ поставлен в соответствие полупроцесс $\{U_f, \mathcal{T}_+, E\}$. Множество всех полупроцессов $\{U_f, \mathcal{T}_+, E\}$, таких, что $f \in F$, будем называть *семейством полупроцессов* (СПП) и обозначать как $\{U_f, \mathcal{T}_+, E, F\}$.

Множество $P \subset E$ называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\{U_f, \mathcal{T}_+, E, F\}$, если для любого ограниченного в E множества B имеет место равенство

$$\lim_{t \in \mathcal{T}_+, t \rightarrow \infty} \sup_{f \in F} \text{dist}_E(U_f(t, h)B, P) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{T}_+,$$

где $\text{dist}_E(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \text{dist}_E(x, y)$.

Равномерным аттрактором семейства полупроцессов называется его наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество. Равномерный аттрактор СПП будем для краткости называть просто *аттрактором*. Достаточное условие существования аттрактора дает следующая

Теорема 1 [11]. Если семейство полупроцессов обладает компактным равномерно притягивающим множеством, то указанное СПП имеет компактный аттрактор.

2. Модель общей циркуляции атмосферы и ее аттрактор

Пусть S - двумерная сфера радиуса R , θ - долгота, φ - широта, Ω - угловая скорость вращения Земли, $l = 2\Omega \sin \varphi$ - параметр Кориолиса, Δ - оператор Лапласа-Бельтрами, $J(u, v)$ - якобиан, $\lambda_n = n(n+1)$ - собственные значения $(-\Delta)$, отвечающие собственным функциям $w_{mn} = w_{mn}(\theta, \varphi)$, $|m| \leq n$, где $w_{mn} = Y_{mn}(\theta, \varphi)$ - сферические гармоники. Обозначим через $L_2^0 = L_2^0(S)$ действительное гильбертово пространство $L_2^0 = \{u(\theta, \varphi) \in L_2(S), \int_S u dS = 0\}$ со скалярным произведением $(u, v) = \int_S u v dS$ и нормой $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. С оператором $(-\Delta)$ свяжем шкалу гильбертовых пространств $H^p = H^p(S)$, $p \in \mathbb{R}$, полагая $H^p = \{u \in L_2^0, \|u\|_p = \|(-\Delta)^{p/2} u\| < +\infty\}$. Для вектор-функций $x = (x_1, x_2)$ высоты два введем пространства $V_p = V_p(S) = H^p \times H^p$ с нормой $\|x\|_p = (\|x_1\|_p^2 + \|x_2\|_p^2)^{1/2}$, где $V_0 = L_2^0 \times L_2^0$, $\|x\|_0 = \|x\|$. Обозначим $[x]_k = (\|x\|_k^2 + \alpha \|x_2\|_{k-1}^2)^{1/2}$. Далее нам потребуются неравенства [12]

$$\|u\|_{L_4(S)} \leq 2^{1/4} \|u\|^{1/2} \|u\|_1^{1/2} \quad \forall u \in H^1, \quad \|\nabla v\|_{L_4(S)} \leq 2^{1/4} \|v\|^{1/2} \|v\|_2^{1/2} \quad \forall v \in H^2.$$

Пусть на $\mathbb{R}_+$ определена ограниченная вектор-функция $f_0 = (f_{01}, f_{02}) \in L_\infty(\mathbb{R}_+; V_0)$, $\|f_0(t)\| \leq G > 0$ при $\forall t \geq 0$. Обозначим через $T(h)$, $h \geq 0$ операторы сдвига по времени, то есть $T(h)f_0(t) = f_0(t+h)$, и через $F = \bigcup_{h \geq 0} T(h)f_0(t)$.

Предполагается, что атмосфера разбита по высоте на два слоя, первому слою соответствуют значения давления от 0 до 500 мб, а второму - от 500 до 1000 мб, $\psi_1 = \psi_1(\theta, \varphi, t)$, $\psi_2 = \psi_2(\theta, \varphi, t)$ - действительные функции, обозначающие функцию тока внутри первого и второго слоев, $x_1 = (\psi_1 + \psi_2)/2$, $x_2 = (\psi_2 - \psi_1)/2$ - баротропная и бароклинная составляющие функции тока, $x = (x_1, x_2)$. Модель общей циркуляции атмосферы имеет вид [1; 3; 9]

$$\frac{\partial \Delta x_1}{\partial t} + J(x_1, \Delta x_1 + l) + J(x_2, \Delta x_2) = \mu \Delta^2 x_1 - \sigma \Delta(x_1 + x_2) + f_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\Delta - \alpha) x_2}{\partial t} + J(x_2, \Delta x_1 + l) + J(x_1, \Delta x_2) = \mu \Delta^2 x_2 - \sigma \Delta(x_1 + x_2) + \alpha J(x_1, x_2) - \mu_1 \Delta x_2 + \sigma_1 x_2 + f_2, \quad (2)$$

$$x|_{t=h} = x_0, \quad (3)$$

где $\sigma, \mu, \sigma_1, \mu_1, \alpha$ - положительные постоянные, $f = (f_1, f_2) \in F$, $h \geq 0$.

Решение задачи (1)-(3) будем записывать как $x(t) = U_f(t, h)x_0$, $t \geq h$. Тем самым определено СПП $\{U_f, \mathbb{R}_+, V_1, F\}$.

Теорема 2 [6]. СПП $\{U_f, \mathbb{R}_+, V_1, F\}$, порождаемое задачей (1)-(3), имеет равномерный аттрактор $A \subset V_3$, причем для любого $x \in A$ верна оценка $[x]_1 \leq r_0 = G\sqrt{2+\alpha}/(4\mu)$.

3. Существование аттрактора явной схемы

Пусть $\mathcal{H}_n$ - собственное подпространство оператора Лапласа-Бельтрами, соответствующее собственному значению $\lambda_n = n(n+1)$. Обозначим через $\mathcal{H}^N = \bigcup_{n=1}^N \mathcal{H}_n$, $\Xi^N = \mathcal{H}^N \times \mathcal{H}^N$ и через P_N оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{H}^N$. Пусть $\tau > 0$ - шаг сетки по времени, $t_k = k\tau$ и x^k - значение приближенного решения на слое $t = t_k$. Для зависящих от времени функций зададим оператор проектирования на сетку $P_{N,\tau}$,

$$\text{действующий по формуле } P_{N,\tau} f^k = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_N f(t) dt.$$

Аппроксимируем задачу (1)-(3) явной спектрально-разностной схемой:

$$\begin{aligned} \Delta D_1^k / \tau + P_N J(x_1^k, \Delta x_1^k + l) + P_N J(x_2^k, \Delta x_2^k) + \sigma \Delta(x_1^k + x_2^k) - \mu \Delta^2 x_1^k &= q_1^{k+1} \in \mathcal{H}^N, \\ (\Delta - \alpha) D_2^k / \tau + P_N J(x_2^k, \Delta x_1^k + l) + P_N J(x_1^k, \Delta x_2^k) - \alpha P_N J(x_1^k, x_2^k) + \sigma \Delta(x_1^k + x_2^k) - \mu \Delta^2 x_2^k &+ \\ + \mu_1 \Delta x_2^k - \sigma_1 x_2^k &= q_2^{k+1} \in \mathcal{H}^N, \end{aligned} \quad (4)$$

$$x^k \in \Xi^N, \quad k \geq j, \quad x^j = \rho \in \Xi^N,$$

где $D_i^k = x_i^{k+1} - x_i^k$, $i = 1, 2$.

Обозначим через $x^k = U_f^{N,\tau}(t_k, t_j)x_0$ решение (4) с начальным условием $\rho = P_N x_0$ и правой частью $q = P_{N,\tau} f$, где $f \in F$. Далее нам потребуется предположение о том, что при изменении τ и N выполняется условие

$$\tau^{1/3} \lambda_N = \tau^{1/3} N(N+1) \leq c \quad (5)$$

с некоторой положительной постоянной c . Введем следующие обозначения

$$\hat{\tau} = \left(\frac{\mu}{4(2\mu+1+\sigma+\alpha+\mu_1+\sigma_1)} \right)^4, \quad a_\tau = \frac{4}{2+\alpha} (\mu - 2\tau^{1/4}(2\mu+1+\sigma+\alpha+\mu_1+\sigma_1)),$$

$$r_\tau = \frac{G}{2\sqrt{\mu a_\tau}}, \quad R_\tau = \sqrt{\frac{\tau^{-1/4} - \left(2\Omega^2 + 2\sigma + \frac{\mu_1}{2} + \frac{\sigma_1}{8} \right) \sqrt{\tau} - \frac{c}{2} \tau^{1/6}}{\sqrt{2c^3} / \mu + \alpha c \hat{\tau}^{1/6} / 2}}.$$

Выберем $\tau_0 \in (0, \hat{\tau}]$ из условия $R_{\tau_0} \geq r_{\tau_0}$. Очевидно, такой выбор возможен, поскольку $R_\tau \rightarrow +\infty$, $r_\tau \rightarrow r_0$ при $\tau \rightarrow +0$.

Теорема 3. Если верно (5), $q = P_{N,\tau} f$, $f \in F$, $\tau \leq \tau_0$ и $[\rho]_1 \leq R_\tau$, то для решения (4) справедлива оценка

$$[x^k]_1^2 \leq \frac{1}{(1+\tau a_\tau)^{k-j}} [\rho]_1^2 + \left(1 - \frac{1}{(1+\tau a_\tau)^{k-j}} \right) r_\tau^2, \quad k \geq j \quad (6)$$

Доказательство. Умножив (4) на x^{k+1} скалярно в V_0 , при $k \geq j$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{[x^{k+1}]_1^2 - [x^k]_1^2}{2\tau} + \frac{[D^k]_1^2}{2\tau} + \mu \|x^{k+1}\|_2^2 + \sigma \|x_1^{k+1} + x_2^{k+1}\|_1^2 + \mu_1 \|x_2^{k+1}\|_1^2 + \sigma_1 \|x_2^{k+1}\|_1^2 = \\ & = -(q^{k+1}, x^{k+1}) - (J(D_1^k, \Delta x_1^k) + J(D_2^k, \Delta x_2^k), x_1^{k+1}) + \mu (\Delta^2 D^k, x^{k+1}) - \sigma (\Delta(D_1^k + D_2^k), \\ & x_1^{k+1} + x_2^{k+1}) - (J(D_2^k, \Delta x_1^k) + J(D_1^k, \Delta x_2^k) - \alpha J(x_1^k, D_2^k) + \mu_1 \Delta D_2^k - \sigma_1 D_2^k, x_2^{k+1}). \end{aligned}$$

Оценим члены в правой части:

$$|(q^{k+1}, x^{k+1})| \leq \|x^{k+1}\|_2 \|q^{k+1}\|_{-2} \leq \frac{1}{2} \|x^{k+1}\|_2 \|q^{k+1}\| \leq \frac{\mu}{2} \|x^{k+1}\|_2^2 + \frac{G^2}{8\mu},$$

$$|(\Delta^2 D^k, x^{k+1})| \leq \|D^k\|_2 \|x^{k+1}\|_2 \leq \sqrt{\lambda_N} \|D^k\|_1 \|x^{k+1}\|_2 \leq \tau^{1/4} \|x^{k+1}\|_2^2 + \frac{\lambda_N \|D^k\|_1^2}{4\tau^{1/4}},$$

$$\begin{aligned} & |(J(D_1^k, \Delta x_1^k), x_1^{k+1})| = |(J(D_1^k, x_1^{k+1}), \Delta x_1^k)| \leq \|\nabla D_1^k\|_{L_4(S)} \|\nabla x_1^{k+1}\|_{L_4(S)} \|x_1^k\|_2 \leq \\ & \leq \sqrt[4]{2} \|D_1^k\|_1^{1/2} \|D_1^k\|_2^{1/2} \|x_1^{k+1}\|_2 \|x_1^k\|_2 \leq \sqrt[4]{2\lambda_N^3} \|D_1^k\|_1 \|x_1^{k+1}\|_2 \|x_1^k\|_1 \leq \\ & \leq \frac{\mu\tau^{1/4}}{2} \|x_1^{k+1}\|_2^2 + \frac{\sqrt{2\lambda_N^3}}{2\mu\tau^{1/4}} \|D_1^k\|_1^2 \|x_1^k\|_1^2 \end{aligned}$$

$$\text{и аналогично } |(J(D_2^k, \Delta x_2^k), x_1^{k+1})| \leq \frac{\mu\tau^{1/4}}{2} \|x_1^{k+1}\|_2^2 + \frac{\sqrt{2\lambda_N^3}}{2\mu\tau^{1/4}} \|D_2^k\|_1^2 \|x_2^k\|_1^2,$$

$$|(J(D_2^k, \Delta x_1^k), x_2^{k+1})| \leq \frac{\mu\tau^{1/4}}{2} \|x_2^{k+1}\|_2^2 + \frac{\sqrt{2\lambda_N^3}}{2\mu\tau^{1/4}} \|D_2^k\|_1^2 \|x_1^k\|_1^2,$$

$$|(J(D_1^k, \Delta x_2^k), x_2^{k+1})| \leq \frac{\mu\tau^{1/4}}{2} \|x_2^{k+1}\|_2^2 + \frac{\sqrt{2\lambda_N^3}}{2\mu\tau^{1/4}} \|D_1^k\|_1^2 \|x_2^k\|_1^2, \text{ кроме того,}$$

$$|(\Delta(D_1^k + D_2^k), x_1^{k+1} + x_2^{k+1})| \leq 2 \|D^k\|_1 \|x^{k+1}\|_1 \leq \tau^{1/4} \|x^{k+1}\|_1^2 + \frac{1}{\tau^{1/4}} \|D^k\|_1^2,$$

$$|(J(D_1^k, l), x_1^{k+1})| + |(J(D_2^k, l), x_2^{k+1})| \leq 2\Omega \|D^k\|_1 \|x^{k+1}\|_1 \leq \tau^{1/4} \|x^{k+1}\|_1^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^{1/4}} \|D^k\|_1^2,$$

$$\begin{aligned} & |(J(x_1^k, D_2^k), x_2^{k+1})| \leq \|x_1^k\|_1 \|D_2^k\|_1 \|x_2^{k+1}\|_2 \leq \sqrt{\lambda_N} \|x_1^k\|_1 \|D_2^k\|_1 \|x_2^{k+1}\|_1 \leq \tau^{1/4} \|x_2^{k+1}\|_1^2 + \\ & + \frac{\lambda_N}{4\tau^{1/4}} \|D_2^k\|_1^2 \|x_1^k\|_1^2, \quad |(\Delta D_2^k, x_2^{k+1})| \leq \|D_2^k\|_1 \|x_2^{k+1}\|_1 \leq \tau^{1/4} \|x_2^{k+1}\|_1^2 + \frac{1}{4\tau^{1/4}} \|D_2^k\|_1^2, \end{aligned}$$

$$|(D_2^k, x_2^{k+1})| \leq \|D_2^k\|_1 \|x_2^{k+1}\|_1 \leq \frac{1}{2} \|D_2^k\|_1 \|x_2^{k+1}\|_1 \leq \tau^{1/4} \|x_2^{k+1}\|_1^2 + \frac{1}{16\tau^{1/4}} \|D_2^k\|_1^2.$$

Учитывая (5), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{[x^{k+1}]_1^2 - [x^k]_1^2}{2\tau} + \left(\frac{\mu}{2} - \tau^{1/4} (2\mu + 1 + \sigma + \alpha + \mu_1 + \sigma_1) \right) \|x^{k+1}\|_2^2 \leq \frac{G^2}{8\mu} + \\ & + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2\lambda_N^3}}{2\mu\tau^{1/4}} + \frac{\alpha\lambda_N}{4\tau^{1/4}} \right) \|x^k\|_1^2 + \left(\Omega^2 + \sigma + \frac{\lambda_N}{4} + \frac{\mu_1}{4} + \frac{\sigma_1}{16} \right) \tau^{-1/4} \right\} \|D^k\|_1^2 - \frac{[D^k]_1^2}{2\tau} \leq \frac{G^2}{8\mu} + \\ & + \frac{[D^k]_1^2}{2\tau^{3/4}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{2c^3}}{\mu} + \frac{\alpha c}{2} \tau^{1/6} \right) [x^k]_1^2 + \left(2\Omega^2 + 2\sigma + \frac{\mu_1}{2} + \frac{\sigma_1}{8} \right) \sqrt{\tau} + \frac{c\tau^{1/6}}{2} - \tau^{-1/4} \right\}. \end{aligned}$$

Если $[x^k]_1 \leq R_\tau$, то

$$\left(\frac{\sqrt{2c^3}}{\mu} + \frac{\alpha c}{2} \tau^{1/6} \right) [x^k]_1^2 + \left(2\Omega^2 + 2\sigma + \frac{\mu_1}{2} + \frac{\sigma_1}{8} \right) \sqrt{\tau} + \frac{c\tau^{1/6}}{2} - \tau^{-1/4} < 0, \text{ следовательно,}$$

$$\frac{[x^{k+1}]_1^2 - [x^k]_1^2}{\tau} + \left(\mu - \tau^{1/4} 2(2\mu + 1 + \sigma + \alpha + \mu_1 + \sigma_1) \right) \|x^{k+1}\|_2^2 \leq \frac{G^2}{4\mu} \quad (7)$$

Используя неравенство $[x]_1^2 \leq (1/2 + \alpha/4) \|x\|_2^2$, запишем (7) в виде

$$(1 + \tau a_\tau) [x^{k+1}]_1^2 \leq [x^k]_1^2 + \frac{\tau G^2}{4\mu} \text{ или } [x^{k+1}]_1^2 \leq \frac{1}{(1 + \tau a_\tau)} [x^k]_1^2 + \left(1 - \frac{1}{(1 + \tau a_\tau)} \right) r_\tau^2.$$

Применяя индукцию по k , убеждаемся в справедливости (6). Теорема доказана.

При $\tau \leq \tau_0$ введем множества $E_\tau = \{x \in V_1 \mid [x]_1 \leq R_\tau\}$, которые будем рассматривать как полные метрические пространства с метрикой, индуцированной из V_1 . Из (6) вытекает, что операторы $U_f^{N,\tau}$ переводят E_τ в себя. Таким образом, определено СПП $\{U_f^{N,\tau}, \mathbb{Z}_+\tau, E_\tau, F\}$.

Теорема 4. Если верно (5) и $\tau < \tau_0$, то СПП $\{U_f^{N,\tau}, \mathbb{Z}_+\tau, E_\tau, F\}$, порождаемое схемой (4), имеет аттрактор $A_{N,\tau}$, причем для любого $x \in A_{N,\tau}$ справедлива оценка $[x]_1 \leq r_\tau$.

Доказательство. Из (6) следует, что рассматриваемое СПП имеет компактное равномерно притягивающее множество $\mathbb{P}_{N,\tau} = \{x \in \Xi^N \mid [x]_1 \leq r_\tau\}$. По Теореме 1 указанное СПП имеет равномерный аттрактор $A_{N,\tau} \subset \mathbb{P}_{N,\tau}$.

Список литературы

1. Дымников В. П., Филатов А. Н. Основы математической теории климата. М.: ВИНТИ, 1994.
2. Ипатова В. М. Аттракторы конечно-разностных схем для системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 1. С. 74-80.
3. Ипатова В. М. Задача инициализации для модели общей циркуляции атмосферы // Труды МФТИ. 2012. Т. 4. № 2. С. 121-130.
4. Ипатова В. М. О равномерных аттракторах явных аппроксимаций // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 574-583.
5. Ипатова В. М. Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Математический сборник. 1997. Т. 188. № 6. С. 47-56.
6. Ипатова В. М. Об аттракторе неявной проекционно-разностной схемы для двухслойной модели общей циркуляции атмосферы с зависящей от времени правой частью // Нелинейный мир. 2012. Т. 10. № 8. С. 515-527.
7. Ипатова В. М. Равномерный аттрактор неавтономного дифференциального уравнения // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2009. № 12. Ч. 1. С. 39-42.
8. Ипатова В. М. Равномерный аттрактор неявной разностной схемы для неавтономного дифференциального уравнения // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2010. № 11. Ч. 2. С. 86-88.
9. Ипатова В. М. Разрешимость модели общей циркуляции атмосферы // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2011. № 9. С. 21-25.
10. Ипатова В. М. Сходимость равномерного аттрактора явной разностной схемы для неавтономного дифференциального уравнения // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2011. № 6. С. 68-71.
11. Chepyshov V. V., Vishik M. I. Attractors of Non-Autonomous Dynamical Systems and Their Dimension // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. P. 279-333.
12. Il'in A. A. Navier-Stokes Equations on the Rotating Sphere. A Simple Proof of the Attractor Dimension Estimate // Nonlinearity. 1994. V. 7. P. 31-39.