Список литературы

1. **О порядке приема, регистрации и разрешения в органах внутренних дел Российской Федерации заявлений, сообщений и иной информации о происшествиях** [Электронный ресурс]: Инструкция, утвержденная Приказом МВД РФ № 333 от 4 мая 2010 г. Доступ из СПС «КонсультантПлюс».
2. **Об электронной цифровой подписи** [Электронный ресурс]: Федеральный закон от 10.01.2002 № 1-ФЗ (ред. от 08.11.2007). Доступ из СПС «КонсультантПлюс».
3. **Уголовно-процессуальный кодекс РФ от 18 декабря 2001 г. № 174-ФЗ** [Электронный ресурс] (в ред. от 01.03.2012 г.). Доступ из СПС «КонсультантПлюс».

УДК 512.7
Физико-математические науки

В статье рассматриваются основные свойства евклидовой семимерной векторной алгебры, а также показано, что кроме евклидовых алгебр возможно построение неевклидовых векторных алгебр в трехмерном и семимерном пространствах, а также изучение выражений, которые можно составлять из векторов и скаляров при помощи операций неевклидовых семимерных векторных алгебр. Основными и простейшими являются линейные комбинации векторов, скалярные и векторные произведения, и кроме того - произведения нескольких векторов.

Ключевые слова и фразы: скаляр; вектор; двойные числа; дуальные числа; скалярные произведения; векторные произведения; линейные векторные пространства; евклидовы семимерные векторные алгебры; неевклидовы семимерные векторные алгебры.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

НАЧАЛА НЕЕВКЛИДОВЫХ СЕМИМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ АЛГЕБР©

В [2] изучены основные свойства евклидовой семимерной векторной алгебры, а в [1] показано, что кроме евклидовых алгебр возможно построение неевклидовых векторных алгебр в трехмерном и семимерном вариантах.

Рассмотрим свойства неевклидовых семимерных векторных алгебр.

Таблица умножения базисных элементов семимерных неевклидовых векторных алгебр может быть представлена в виде:

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	
$\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}_3$	$\alpha\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_5$	$\alpha\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$-\alpha\mathbf{e}_6$	
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	0	$-\alpha\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\alpha\mathbf{e}_4$	$\alpha\mathbf{e}_5$	
$\mathbf{e}_3$	$-\alpha\mathbf{e}_2$	$\alpha\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}_7$	$\alpha\mathbf{e}_6$	$-\alpha\mathbf{e}_5$	$-\alpha^2\mathbf{e}_4$	
$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_7$	0	$-\alpha\mathbf{e}_1$	$-\alpha\mathbf{e}_2$	$-\alpha\mathbf{e}_3$	
$\mathbf{e}_5$	$-\alpha\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$-\alpha\mathbf{e}_6$	$\alpha\mathbf{e}_1$	0	$\alpha\mathbf{e}_3$	$\alpha^2\mathbf{e}_2$	
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$-\alpha\mathbf{e}_4$	$\alpha\mathbf{e}_5$	$\alpha\mathbf{e}_2$	$-\alpha\mathbf{e}_3$	0	$-\alpha^2\mathbf{e}_1$	
$\mathbf{e}_7$	$\alpha\mathbf{e}_6$	$-\alpha\mathbf{e}_5$	$\alpha^2\mathbf{e}_4$	$\alpha\mathbf{e}_3$	$-\alpha^2\mathbf{e}_2$	$\alpha^2\mathbf{e}_1$	0	

где α принимает значения ±1 или 0. Здесь $\alpha=-1$ соответствует евклидовой семимерной векторной алгебре (Гамильтона-Грассмана), $\alpha=1$ - алгебре, отвечающей восьмимерному расширению двойных чисел, а $\alpha=0$ - алгебре, отвечающей восьмимерному расширению дуальных чисел.

Целью настоящей работы является изучение выражений, которые можно составлять из векторов и скаляров при помощи операций неевклидовых семимерных векторных алгебр. Основными и простейшими являются линейные комбинации векторов, скалярные и векторные произведения, а также произведения нескольких векторов.

Линейными операциями над векторами являются сложение векторов и умножение вектора на скаляр, определяемые свойствами семимерного линейного векторного пространства:

1. ассоциативность сложения векторов
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;
2. коммутативность сложения векторов
$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;
3. наличие нулевого вектора
$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$;
4. наличие противоположного вектора
$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$.

При векторном сложении результат не зависит от порядка слагаемых, и сумму более чем двух векторов можно писать без скобок.

Действие умножение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:
1. $a\mathbf{A}=\mathbf{A}a$;
2. $(ab)\mathbf{A}=a(b\mathbf{A})$;
3. $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$;
4. $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$.

В основе векторной алгебры лежат определения скалярного и векторного произведений двух векторов.

Скалярным произведением $(\mathbf{AB})$ двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ назовем скаляр $(\mathbf{AB})=(A_i\mathbf{e}_iB_\kappa\mathbf{e}_\kappa)=A_iB_k(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k)=g_{ik}A_iB_k$, определяемый матрицей скалярных произведений векторов базиса вида:

$$g_{ik}=(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k)=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^3 \end{array}\right\|$$

так что
$(\mathbf{AB})=g_{ik}A_iB_k=g_{ii}A_iB_i$,
т.е. $(\mathbf{AB})=-\alpha A_1B_1-\alpha A_2B_2+\alpha^2A_3B_3-\alpha A_4B_4+\alpha^2A_5B_5+\alpha^2A_6B_6-\alpha^3A_7B_7$.

Скалярный квадрат вектора $\mathbf{A}$ определяется соответственно равенством
$(\mathbf{AA})=-\alpha A_1^2-\alpha A_2^2+\alpha^2A_3^2-\alpha A_4^2+\alpha^2A_5^2+\alpha^2A_6^2-\alpha^3A_7^2=\mathbf{A}^2$,
так что скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора, причем модуль вектора
$A=\sqrt{-\alpha A_1^2-\alpha A_2^2+\alpha^2A_3^2-\alpha A_4^2+\alpha^2A_5^2+\alpha^2A_6^2-\alpha^3A_7^2}$.

Очевидны свойства скалярного произведения двух векторов:
1. $(a\mathbf{AB})=a(\mathbf{AB})$;
2. $(\mathbf{AB})=(\mathbf{BA})$;
3. $(\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}))=(\mathbf{AB})+(\mathbf{AC})$;
4. два вектора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ортогональны, если выполняется условие $(\mathbf{AB})=0$.

Векторное произведение $[\mathbf{AB}]$ двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ определяется матрицей векторных произведений векторов базиса, причем его можно записать в виде:

$$\begin{aligned}[\mathbf{AB}] &=[(A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+\ldots+A_7\mathbf{e}_7)(B_1\mathbf{e}_1+B_2\mathbf{e}_2+\ldots+B_7\mathbf{e}_7)]=(-\alpha(A_2B_3-A_3B_2)-\alpha(A_4B_5-A_5B_4)+\alpha^2(A_7B_6-A_6B_7))\mathbf{e}_1+\\ &+(-\alpha(A_4B_6-A_6B_4)+\alpha^2(A_5B_7-A_7B_5)-\alpha(A_3B_1-A_1B_3))\mathbf{e}_2+(-\alpha(A_6B_5-A_5B_6)+(A_1B_2-A_2B_1)-\alpha(A_4B_7-A_7B_4))\mathbf{e}_3+\\ &+(-\alpha(A_5B_1-A_1B_5)+\alpha^2(A_7B_3-A_3B_7)-\alpha(A_6B_2-A_2B_6))\mathbf{e}_4+(-\alpha(A_7B_2-A_2B_7)-\alpha(A_3B_6-A_6B_3)+(A_1B_4-A_4B_1))\mathbf{e}_5+\\ &+(-\alpha(A_1B_7-A_7B_1)+(A_2B_4-A_4B_2)-\alpha(A_5B_3-A_3B_5))\mathbf{e}_6+((A_3B_4-A_4B_3)+(A_6B_1-A_1B_6)+(A_2B_5-A_5B_2))\mathbf{e}_7.\end{aligned}$$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$$[\mathbf{AB}]=\begin{vmatrix} -\alpha e_1 & -\alpha e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\alpha e_2 & -\alpha e_4 & e_6 \\ A_2 & A_4 & A_6 \\ B_2 & B_4 & B_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\alpha e_3 & -\alpha e_6 & -\alpha e_5 \\ A_3 & A_6 & A_5 \\ B_3 & B_6 & B_5 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} -\alpha e_4 & e_5 & -\alpha e_6 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ B_4 & B_5 & B_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\alpha e_5 & e_7 & \alpha^2 e_2 \\ A_5 & A_7 & A_2 \\ B_5 & B_7 & B_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\alpha e_6 & \alpha^2 e_1 & e_7 \\ A_6 & A_1 & A_7 \\ B_6 & B_1 & B_7 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_7 & -\alpha e_3 & \alpha^2 e_4 \\ A_7 & A_3 & A_4 \\ B_7 & B_3 & B_4 \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует, что:
1. $[a\mathbf{AB}]=a[\mathbf{AB}]$;
2. $[\mathbf{AB}]=-[\mathbf{BA}]$;
3. $[\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})]=[\mathbf{AB}]+[\mathbf{AC}]$;
4. $[a\mathbf{AA}]=\mathbf{0}$.

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны лишь следующие типы произведений:

1. **A(BC)** - простейшее произведение трех векторов;
2. **(A[BC])** - смешанное произведение трех векторов;
3. **[A[BC]]** - двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение **A(BC)** трех векторов **A**, **B** и **C** получается умножением скалярного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получается вектор, коллинеарный с третьим вектором. Из этого в общем случае вытекает неравенство

$\mathbf{A(BC)}\neq\mathbf{(AB)C}$,

так что рассматриваемое векторное исчисление не ассоциативно.

Смешанное произведение **(A[BC])=(ABC)** трех векторов **A**, **B** и **C** получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию

$\mathbf{(A[BC])}=-\alpha A_1[BC]_1-\alpha A_2[BC]_2+\alpha^2 A_3[BC]_3-A_4[BC]_4+\alpha^2 A_5[BC]_5+\alpha^2 A_6[BC]_6-\alpha^3 A_7[BC]_7=$
$=-\alpha\, A_1\,(-\alpha(B_2C_3-B_3C_2)\ -\alpha\ (B_4C_5-B_5C_4)+\alpha^2(B_7C_6-B_6C_7))+$
$-\alpha\, A_2\,(-\alpha(B_4C_6-B_6C_4)+\alpha^2(B_5C_7-B_7C_5)\ -\alpha\ (B_3C_1-B_1C_3))+$
$+\alpha^2 A_3(-\alpha(B_6C_5-B_5C_6)+\ (B_1C_2-B_2C_1)\ -\alpha\ (B_4C_7-B_7C_4))+$
$-\alpha\, A_4\,(-\alpha(B_5C_1-B_1C_5)+\alpha^2(B_7C_3-B_3C_7)\ -\alpha\ (B_6C_2-B_2C_6))+$
$+\alpha^2 A_5(-\alpha(B_7C_2-B_2C_7)\ -\alpha\ (B_3C_6-B_6C_3)+\ (B_1C_4-B_4C_1))+$
$+\alpha^2 A_6\,(-\alpha(B_1C_7-B_7C_1)+\ (B_2C_4-B_4C_2)\ -\alpha\ (B_5C_3-B_3C_5))+$
$-\alpha^3\, A_7\,(\ (B_3C_4-B_4C_3)+\ (B_6C_1-B_1C_6)+\ (B_2C_5-B_5C_2)).$

Смешанное произведение трех векторов можно представить в виде суммы определителей:

$$\mathbf{(ABC)}=\alpha^2\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}+\alpha^2\begin{vmatrix}A_2 & A_4 & A_6\\ B_2 & B_4 & B_6\\ C_2 & C_4 & C_6\end{vmatrix}-\alpha^3\begin{vmatrix}A_3 & A_6 & A_5\\ B_3 & B_6 & B_5\\ C_3 & C_6 & C_5\end{vmatrix}+$$

$$+\alpha^2\begin{vmatrix}A_4 & A_5 & A_1\\ B_4 & B_5 & B_1\\ C_4 & C_5 & C_1\end{vmatrix}-\alpha^3\begin{vmatrix}A_5 & A_7 & A_2\\ B_5 & B_7 & B_2\\ C_5 & C_7 & C_2\end{vmatrix}-\alpha^3\begin{vmatrix}A_6 & A_1 & A_7\\ B_6 & B_1 & B_7\\ C_6 & C_1 & C_7\end{vmatrix}-\alpha^3\begin{vmatrix}A_7 & A_3 & A_4\\ B_7 & B_3 & B_4\\ C_7 & C_3 & C_4\end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует, что:

1. $(a\mathbf{ABC})=a(\mathbf{ABC})$;
2. смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. $\mathbf{(AB(C+D))=(ABC)+(ABD)}$;
4. если два вектора **A** и **B** в смешанном произведении трех векторов коллинеарные, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль. Так что, векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов $\mathbf{([AB]A)=0}$. Если три вектора **A**, **B** и $\mathbf{C=A+B}$ компланарны, то выполняется равенство $\mathbf{(ABC)=(AB(A+B))=0}$.

Двойное векторное произведение **[A[BC]]** трех векторов **A**, **B** и **C** получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор

$\mathbf{[A[BC]]=[AD]=E}=E_1\mathbf{e}_1+E_2\mathbf{e}_2+\ldots+E_7\mathbf{e}_7.$

В координатной форме записи для первой координаты двойного векторного произведения имеет место соотношение

$E_1=-\alpha(A_2D_3-A_3D_2)-\alpha(A_4D_5-A_5D_4)+\alpha^2(A_7D_6-A_6D_7)=$
$=-\alpha A_2\,(-\alpha(B_6C_5-B_5C_6)+\ (B_1C_2-B_2C_1)-\alpha(B_4C_7-B_7C_4))\ +$
$+\alpha A_3\,(-\alpha(B_4C_6-B_6C_4)+\alpha^2(B_5C_7-B_7C_5)-\alpha(B_3C_1-B_1C_3))\ -$
$-\alpha A_4\,(-\alpha(B_7C_2-B_2C_7)-\alpha\ (B_3C_6-B_6C_3)+\ (B_1C_4-B_4C_1))\ +$
$+\alpha A_5\,(-\alpha(B_5C_1-B_1C_5)+\alpha^2(B_7C_3-B_3C_7)-\alpha(B_6C_2-B_2C_6))\ +$
$+\alpha^2 A_7(-\alpha(B_1C_7-B_7C_1)+\ (B_2C_4-B_4C_2)-\alpha(B_5C_3-B_3C_5))\ -$
$-\alpha^2 A_6(\ (B_3C_4-B_4C_3)+\ (B_6C_1-B_1C_6)+\ (B_2C_5-B_5C_2)),$

т.е. $E_1=B_1\mathbf{(CA)}-C_1\mathbf{(AB)}+\mathbf{[ABC]}_1$,

где

$$\mathbf{[ABC]}_1=\alpha^2\begin{vmatrix}A_2 & A_4 & A_7\\ B_2 & B_4 & B_7\\ C_2 & C_4 & C_7\end{vmatrix}-\alpha^3\begin{vmatrix}A_3 & A_7 & A_5\\ B_3 & B_7 & B_5\\ C_3 & C_7 & C_5\end{vmatrix}+\alpha^2\begin{vmatrix}A_4 & A_3 & A_6\\ B_4 & B_3 & B_6\\ C_4 & C_3 & C_6\end{vmatrix}+\alpha^2\begin{vmatrix}A_6 & A_5 & A_2\\ B_6 & B_5 & B_2\\ C_6 & C_5 & C_2\end{vmatrix}.$$

Аналогично, для других координат

$E_2=B_2\mathbf{(CA)}-C_2\mathbf{(AB)}+\mathbf{[ABC]}_2,$

где

$$\mathbf{[ABC]}_2 = \alpha^2 \begin{vmatrix} A_4 & A_5 & A_3 \\ B_4 & B_5 & B_3 \\ C_4 & C_5 & C_3 \end{vmatrix} - \alpha^3 \begin{vmatrix} A_6 & A_3 & A_7 \\ B_6 & B_3 & B_7 \\ C_6 & C_3 & C_7 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_5 & A_6 & A_1 \\ B_5 & B_6 & B_1 \\ C_5 & C_6 & C_1 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_1 & A_7 & A_4 \\ B_1 & B_7 & B_4 \\ C_1 & C_7 & C_4 \end{vmatrix},$$

$E_3 = B_3\mathbf{(CA)} - C_3\mathbf{(AB)} + \mathbf{[ABC]}_3,$
где

$$\mathbf{[ABC]}_3 = -\alpha \begin{vmatrix} A_6 & A_1 & A_4 \\ B_6 & B_1 & B_4 \\ C_6 & C_1 & C_4 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_5 & A_4 & A_2 \\ B_5 & B_4 & B_2 \\ C_5 & C_4 & C_2 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_1 & A_5 & A_7 \\ B_1 & B_5 & B_7 \\ C_1 & C_5 & C_7 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_7 & A_2 & A_6 \\ B_7 & B_2 & B_6 \\ C_7 & C_2 & C_6 \end{vmatrix},$$

$E_4 = B_4\mathbf{(CA)} - C_4\mathbf{(AB)} + \mathbf{[ABC]}_4,$
где

$$\mathbf{[ABC]}_4 = -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_5 & A_7 & A_6 \\ B_5 & B_7 & B_6 \\ C_5 & C_7 & C_6 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_1 & A_6 & A_3 \\ B_1 & B_6 & B_3 \\ C_1 & C_6 & C_3 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_7 & A_1 & A_2 \\ B_7 & B_1 & B_2 \\ C_7 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_5 \\ B_2 & B_3 & B_5 \\ C_2 & C_3 & C_5 \end{vmatrix},$$

$E_5 = B_5\mathbf{(CA)} - C_5\mathbf{(AB)} + \mathbf{[ABC]}_5,$
где

$$\mathbf{[ABC]}_5 = \alpha^2 \begin{vmatrix} A_7 & A_3 & A_1 \\ B_7 & B_3 & B_1 \\ C_7 & C_3 & C_1 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_2 & A_1 & A_6 \\ B_2 & B_1 & B_6 \\ C_2 & C_1 & C_6 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_4 \\ B_3 & B_2 & B_4 \\ C_3 & C_2 & C_4 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_4 & A_6 & A_7 \\ B_4 & B_6 & B_7 \\ C_4 & C_6 & C_7 \end{vmatrix},$$

$E_6 = B_6\mathbf{(CA)} - C_6\mathbf{(AB)} + \mathbf{[ABC]}_6,$
где

$$\mathbf{[ABC]}_6 = -\alpha \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_5 \\ B_1 & B_2 & B_5 \\ C_1 & C_2 & C_5 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_7 & A_5 & A_4 \\ B_7 & B_5 & B_4 \\ C_7 & C_5 & C_4 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_2 & A_7 & A_3 \\ B_2 & B_7 & B_3 \\ C_2 & C_7 & C_3 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_3 & A_4 & A_1 \\ B_3 & B_4 & B_1 \\ C_3 & C_4 & C_1 \end{vmatrix},$$

$E_7 = B_7\mathbf{(CA)} - C_7\mathbf{(AB)} + \mathbf{[ABC]}_7,$
где

$$\mathbf{[ABC]}_7 = -\alpha \begin{vmatrix} A_3 & A_6 & A_2 \\ B_3 & B_6 & B_2 \\ C_3 & C_6 & C_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_4 & A_2 & A_1 \\ B_4 & B_2 & B_1 \\ C_4 & C_2 & C_1 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_6 & A_4 & A_5 \\ B_6 & B_4 & B_5 \\ C_6 & C_4 & C_5 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_5 & A_1 & A_3 \\ B_5 & B_1 & B_3 \\ C_5 & C_1 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, окончательно запишем
$\mathbf{[A[BC]]} = \mathbf{B(CA)} - \mathbf{C(AB)} + \mathbf{[ABC]},$
где вектор **[ABC]** можно представить в виде суммы определителей:

$$\mathbf{[ABC]} = \begin{vmatrix} \alpha^2\mathbf{e}_1 & \alpha^2\mathbf{e}_2 & \alpha^2\mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_7 \\ A_1 & A_2 & A_4 & A_7 \\ B_1 & B_2 & B_4 & B_7 \\ C_1 & C_2 & C_4 & C_7 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha^2\mathbf{e}_2 & \alpha^2\mathbf{e}_4 & -\alpha\mathbf{e}_5 & -\alpha\mathbf{e}_3 \\ A_2 & A_4 & A_5 & A_3 \\ B_2 & B_4 & B_5 & B_3 \\ C_2 & C_4 & C_5 & C_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\mathbf{e}_3 & -\alpha\mathbf{e}_6 & \alpha^2\mathbf{e}_1 & \alpha^2\mathbf{e}_4 \\ A_3 & A_6 & A_1 & A_4 \\ B_3 & B_6 & B_1 & B_4 \\ C_3 & C_6 & C_1 & C_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha^3\mathbf{e}_4 & \alpha^2\mathbf{e}_5 & -\alpha\mathbf{e}_7 & \alpha^2\mathbf{e}_6 \\ A_4 & A_5 & A_7 & A_6 \\ B_4 & B_5 & B_7 & B_6 \\ C_4 & C_5 & C_7 & C_6 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha^2\mathbf{e}_5 & -\alpha\mathbf{e}_7 & \alpha^2\mathbf{e}_3 & -\alpha^3\mathbf{e}_1 \\ A_5 & A_7 & A_3 & A_1 \\ B_5 & B_7 & B_3 & B_1 \\ C_5 & C_7 & C_3 & C_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\mathbf{e}_6 & \alpha^2\mathbf{e}_1 & \alpha^2\mathbf{e}_2 & -\alpha\mathbf{e}_5 \\ A_6 & A_1 & A_2 & A_5 \\ B_6 & B_1 & B_2 & B_5 \\ C_6 & C_1 & C_2 & C_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\mathbf{e}_7 & \alpha^2\mathbf{e}_3 & \alpha^2\mathbf{e}_6 & -\alpha^3\mathbf{e}_2 \\ A_7 & A_3 & A_6 & A_2 \\ B_7 & B_3 & B_6 & B_2 \\ C_7 & C_3 & C_6 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Подобным образом можно получить соотношение
$\mathbf{[[AB]C]} = \mathbf{[C[BA]]} = \mathbf{B(CA)} - \mathbf{A(BC)} - \mathbf{[ABC]}.$

Антисимметричная по перестановке любой пары векторов векторная функция трех векторов **[ABC]** является векторным произведением трех векторов.

Из свойств определителей следует, что:

1. векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е. $\mathbf{[}a\mathbf{ABC]} = a\mathbf{[ABC]}$;
2. векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

3. векторное произведение трех векторов дистрибутивно, т.е.

[AB(C+D)] = **[ABC]**+**[ABD]**;

4. если два вектора в векторном произведении трех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль. Если любой из векторов **A**, **B** или **C** раскладывается по двум векторам, то выполняется условие **[ABC]**=**0**.

Используя циклические подстановки векторов, получим

[A[BC]]+**[B[CA]]**+**[C[AB]]**= 3**[ABC]**

и **[[AB]C]**+**[[BC]A]**+**[[CA]B]**=-3**[ABC]**,

так что, в рассматриваемых алгебрах не выполняется соотношение Якоби, они не ассоциативны и не относятся к классу алгебр Ли.

Все произведения четырех векторов можно получить следующими двумя способами:

- умножением произведения трех векторов на четвертый вектор;
- умножением произведения двух векторов на произведение двух векторов.

В соответствии с этим, возможны следующие типы произведений:

((AB)CD)	**(AB)(CD)**	**(ABC)D**
[(AB)CD]	**(AB)[CD]**	
([[AB]C]D)	**([AB][CD])**	
[[[AB]C]D]	**[[AB][CD]]**	

Не все девять получившихся произведений различны между собой. Действительно, во-первых, мы знаем, что скалярный множитель можно выносить за знак скалярного и векторного произведений двух векторов. Поэтому

((AB)CD) = **(AB)(CD)**

[(AB)CD] = **(AB)[CD]**.

Во-вторых, считая векторное произведение **[AB]** за один вектор, мы можем рассматривать **([[AB]C]D)** как смешанное произведение трех векторов **[AB], C** и **D**. Применив к нему закон сочетательности, получим

([[AB]C]D) = **([AB][CD])**.

Итак, остаются только шесть типов произведений четырех векторов

1. **((AB)CD)** = **(AB)(CD)**;
2. **[(AB)CD]** = **(AB)[CD]**;
3. **([[AB]C]D)** = **([AB][CD])**;
4. **([AB]C)D** = **(ABC)D**;
5. **[[AB][CD]]**;
6. **[[[AB]C]D]**.

Мы покажем теперь, что четыре последних произведения не являются линейными комбинациями из произведений первых двух типов, которые считались основными в трехмерном случае.

Скалярное произведение двух векторов **[AB]** и **[CD]**, как уже отмечалось, является смешанным произведением трех векторов **([[AB]C]D)**. На основании закона сочетательности мы можем для вычисления этого произведения перемножить векторно два первых множителя **[AB]** и **C** и результат умножить скалярно на третий множитель, следовательно

([AB][CD]) = **([[AB]C]D)**.

Развернув получившееся в скобках двойное векторное произведение трех векторов по формуле разложения, мы получим

([AB][CD]) = **((B(AC)-A(BC)-[ABC])D)**

или, раскрыв скобки

$$\mathbf{([AB][CD])} = \begin{vmatrix} \mathbf{(AC)} & \mathbf{(BC)} \\ \mathbf{(AD)} & \mathbf{(BD)} \end{vmatrix} - \mathbf{([ABC]D)}.$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение третьего типа не выражается только через произведения первого типа, что имеет место в трехмерной алгебре.

Назовем второе слагаемое в правой части тождества смешанным произведением четырех векторов и обозначим его через

(ABCD) = **([ABC]D)**.

Используя координатную запись векторного произведения трех векторов **[ABC]**, получим координатную запись смешанного произведения четырех векторов в виде:

$$-(\mathbf{ABCD})=-\alpha^3\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_4 & A_7 \\ B_1 & B_2 & B_4 & B_7 \\ C_1 & C_2 & C_4 & C_7 \\ D_1 & D_2 & D_4 & D_7 \end{vmatrix} -$$

$$-\alpha^3\begin{vmatrix} A_2 & A_4 & A_5 & A_3 \\ B_2 & B_4 & B_5 & B_3 \\ C_2 & C_4 & C_5 & C_3 \\ D_2 & D_4 & D_5 & D_3 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_3 & A_6 & A_1 & A_4 \\ B_3 & B_6 & B_1 & B_4 \\ C_3 & C_6 & C_1 & C_4 \\ D_3 & D_6 & D_1 & D_4 \end{vmatrix} +\alpha^4\begin{vmatrix} A_4 & A_5 & A_7 & A_6 \\ B_4 & B_5 & B_7 & B_6 \\ C_4 & C_5 & C_7 & C_6 \\ D_4 & D_5 & D_7 & D_6 \end{vmatrix} +$$

$$+\alpha^4\begin{vmatrix} A_5 & A_7 & A_3 & A_1 \\ B_5 & B_7 & B_3 & B_1 \\ C_5 & C_7 & C_3 & C_1 \\ D_5 & D_7 & D_3 & D_1 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_6 & A_1 & A_2 & A_5 \\ B_6 & B_1 & B_2 & B_5 \\ C_6 & C_1 & C_2 & C_5 \\ D_6 & D_1 & D_2 & D_5 \end{vmatrix} +\alpha^4\begin{vmatrix} A_7 & A_3 & A_6 & A_2 \\ B_7 & B_3 & B_6 & B_2 \\ C_7 & C_3 & C_6 & C_2 \\ D_7 & D_3 & D_6 & D_2 \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует:

1. смешанное произведение четырех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.

$(a\mathbf{ABCD}) = a(\mathbf{ABCD})$;

2. смешанное произведение четырех векторов изменяет знак при перестановке любой пары его векторов;

3. смешанное произведение четырех векторов дистрибутивно, т.е.

$(\mathbf{ABC}(\mathbf{D}+\mathbf{E})) = (\mathbf{ABCD})+(\mathbf{ABCE})$;

4. если два вектора в векторном произведении четырех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении четырех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение трех векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов $([\mathbf{ABC}]\mathbf{A})=\mathbf{0}$. Если четыре вектора **A**, **B**, **C** и **D** компланарны, либо разложены по трем векторам, то выполняется условие $(\mathbf{ABCD}) = \mathbf{0}$.

При этом из уравнения

$$([\mathbf{AB}][\mathbf{CD}])+(\mathbf{ABCD})=\begin{vmatrix} (\mathbf{AC}) & (\mathbf{BC}) \\ (\mathbf{AD}) & (\mathbf{BD}) \end{vmatrix}$$

следует соотношение

$([\mathbf{AB}][\mathbf{CD}]) +([\mathbf{BC}][\mathbf{AD}]) + ([\mathbf{CA}][\mathbf{BD}]) = -3(\mathbf{ABCD})$

и, как частный случай, при **C**=**A** и **D**=**B** - основное тождество для двух векторов

$$[\mathbf{AB}]^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{AA}) & (\mathbf{BA}) \\ (\mathbf{AB}) & (\mathbf{BB}) \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение двух векторных произведений **[[AB][CD]]** можно преобразовать двумя способами: во-первых, рассматривая это произведение как двойное векторное произведение трех векторов **[AB]**, **C** и **D**, мы получим

$[[\mathbf{AB}][\mathbf{CD}]] = \mathbf{C}(\mathbf{D}[\mathbf{AB}])-\mathbf{D}([\mathbf{AB}]\mathbf{C})+[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}]$.

Во-вторых, рассматривая то же произведение как двойное векторное произведение трех векторов **A**, **B** и **[CD]**, мы получим:

$[[\mathbf{AB}][\mathbf{CD}]] = \mathbf{B}([\mathbf{CD}]\mathbf{A})-\mathbf{A}(\mathbf{B}[\mathbf{CD}])-[\mathbf{AB}[\mathbf{CD}]]$.

Таким образом, векторное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение пятого типа, не выражается только через произведения четвертого типа. Сравнив оба выражения для одного и того же произведения **[[AB][CD]]**, мы получим

$\mathbf{C}(\mathbf{D}[\mathbf{AB}])-\mathbf{D}([\mathbf{AB}]\mathbf{C})+[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}] = \mathbf{B}([\mathbf{CD}]\mathbf{A})-\mathbf{A}(\mathbf{B}[\mathbf{CD}])-[\mathbf{AB}[\mathbf{CD}]]$

или

$\mathbf{A}(\mathbf{BCD}) - \mathbf{B}(\mathbf{CDA}) + \mathbf{C}(\mathbf{DAB})-\mathbf{D}(\mathbf{ABC}) = -[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}]-[\mathbf{AB}[\mathbf{CD}]]$.

При этом отпадает возможность разложения вектора по трем векторам.

Выражение в правой части тождества является векторным произведением четырех векторов **[ABCD]**, т.е.

$$[\mathbf{ABCD}] = -[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}]-[\mathbf{AB}[\mathbf{CD}]] = \mathbf{A}(\mathbf{BCD}) - \mathbf{B}(\mathbf{CDA}) + \mathbf{C}(\mathbf{DAB})-\mathbf{D}(\mathbf{ABC}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ (\mathbf{ACD}) & (\mathbf{BCD}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ (\mathbf{CAB}) & (\mathbf{DAB}) \end{vmatrix}.$$

Используя координатную запись смешанных произведений трех векторов, можно получить векторное произведение четырех векторов в виде

[ABCD] =

$$=\left(-\alpha^3\begin{vmatrix} A_1 & A_5 & A_7 & A_2 \\ B_1 & B_5 & B_7 & B_2 \\ C_1 & C_5 & C_7 & C_2 \\ D_1 & D_5 & D_7 & D_2 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_1 & A_7 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_7 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_7 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_7 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_6 & A_5 \\ B_1 & B_3 & B_6 & B_5 \\ C_1 & C_3 & C_6 & C_5 \\ D_1 & D_3 & D_6 & D_5 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_4 & A_6 \\ B_1 & B_2 & B_4 & B_6 \\ C_1 & C_2 & C_4 & C_6 \\ D_1 & D_2 & D_4 & D_6 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_1+$$

$$+\left(-\alpha^3\begin{vmatrix} A_2 & A_7 & A_3 & A_4 \\ B_2 & B_7 & B_3 & B_4 \\ C_2 & C_7 & C_3 & C_4 \\ D_2 & D_7 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_6 & A_5 \\ B_2 & B_3 & B_6 & B_5 \\ C_2 & C_3 & C_6 & C_5 \\ D_2 & D_3 & D_6 & D_5 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_2 & A_6 & A_1 & A_7 \\ B_2 & B_6 & B_1 & B_7 \\ C_2 & C_6 & C_1 & C_7 \\ D_2 & D_6 & D_1 & D_7 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_2 & A_4 & A_5 & A_1 \\ B_2 & B_4 & B_5 & B_1 \\ C_2 & C_4 & C_5 & C_1 \\ D_2 & D_4 & D_5 & D_1 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_2+$$

$$+\left(\alpha^2\begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_4 & A_6 \\ B_3 & B_2 & B_4 & B_6 \\ C_3 & C_2 & C_4 & C_6 \\ D_3 & D_2 & D_4 & D_6 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_3 & A_4 & A_5 & A_1 \\ B_3 & B_4 & B_5 & B_1 \\ C_3 & C_4 & C_5 & C_1 \\ D_3 & D_4 & D_5 & D_1 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_3 & A_5 & A_7 & A_2 \\ B_3 & B_5 & B_7 & B_2 \\ C_3 & C_5 & C_7 & C_2 \\ D_3 & D_5 & D_7 & D_2 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_3 & A_6 & A_1 & A_7 \\ B_3 & B_6 & B_1 & B_7 \\ C_3 & C_6 & C_1 & C_7 \\ D_3 & D_6 & D_1 & D_7 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_3+$$

$$+\left(-\alpha^3\begin{vmatrix} A_4 & A_3 & A_6 & A_5 \\ B_4 & B_3 & B_6 & B_5 \\ C_4 & C_3 & C_6 & C_5 \\ D_4 & D_3 & D_6 & D_5 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_4 & A_6 & A_1 & A_7 \\ B_4 & B_6 & B_1 & B_7 \\ C_4 & C_6 & C_1 & C_7 \\ D_4 & D_6 & D_1 & D_7 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_4 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_4 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_4 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_4 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_4 & A_5 & A_7 & A_2 \\ B_4 & B_5 & B_7 & B_2 \\ C_4 & C_5 & C_7 & C_2 \\ D_4 & D_5 & D_7 & D_2 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_4+$$

$$+\left(-\alpha^3\begin{vmatrix} A_5 & A_6 & A_1 & A_7 \\ B_5 & B_6 & B_1 & B_7 \\ C_5 & C_6 & C_1 & C_7 \\ D_5 & D_6 & D_1 & D_7 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_5 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_5 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_5 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_5 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_5 & A_2 & A_4 & A_6 \\ B_5 & B_2 & B_4 & B_6 \\ C_5 & C_2 & C_4 & C_6 \\ D_5 & D_2 & D_4 & D_6 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_5 & A_7 & A_3 & A_4 \\ B_5 & B_7 & B_3 & B_4 \\ C_5 & C_7 & C_3 & C_4 \\ D_5 & D_7 & D_3 & D_4 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_5+$$

$$+\left(\alpha^2\begin{vmatrix} A_6 & A_4 & A_5 & A_1 \\ B_6 & B_4 & B_5 & B_1 \\ C_6 & C_4 & C_5 & C_1 \\ D_6 & D_4 & D_5 & D_1 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_6 & A_5 & A_7 & A_2 \\ B_6 & B_5 & B_7 & B_2 \\ C_6 & C_5 & C_7 & C_2 \\ D_6 & D_5 & D_7 & D_2 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_6 & A_7 & A_3 & A_4 \\ B_6 & B_7 & B_3 & B_4 \\ C_6 & C_7 & C_3 & C_4 \\ D_6 & D_7 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_6 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_6 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_6 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_6 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_6+$$

$$+\left(\alpha^2\begin{vmatrix} A_7 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_7 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_7 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_7 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_7 & A_2 & A_4 & A_6 \\ B_7 & B_2 & B_4 & B_6 \\ C_7 & C_2 & C_4 & C_6 \\ D_7 & D_2 & D_4 & D_6 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_7 & A_4 & A_5 & A_1 \\ B_7 & B_4 & B_5 & B_1 \\ C_7 & C_4 & C_5 & C_1 \\ D_7 & D_4 & D_5 & D_1 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_7 & A_3 & A_6 & A_5 \\ B_7 & B_3 & B_6 & B_5 \\ C_7 & C_3 & C_6 & C_5 \\ D_7 & D_3 & D_6 & D_5 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_7.$$

Из свойств определителей следует, что:

1. векторное произведение четырех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.

$[a\mathbf{ABCD}] = a[\mathbf{ABCD}]$;

2. векторное произведение четырех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. векторное произведение четырех векторов дистрибутивно, т.е.

$[\mathbf{ABC}(\mathbf{D}+\mathbf{E})] = [\mathbf{ABCD}]+[\mathbf{ABCE}]$;

4. если два вектора в векторном произведении четырех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в векторном произведении четырех векторов равны, то оно обращается в нуль. Если любой из векторов **A**, **B**, **C** и **D** раскладывается по двум или трем векторам, то выполняется условие

$[\mathbf{ABCD}] = \mathbf{0}$.

Тройное векторное произведение четырех векторов $[[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}]$ можно также преобразовать двумя способами. Во-первых, разложив двойное векторное произведение внутри скобок и умножив векторно на четвертый вектор **D**, получим

$[[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}] = (\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] - (\mathbf{CB})[\mathbf{AD}] - [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]$.

Во-вторых, разложив тройное векторное произведение четырех векторов, получим

$[[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}] = \mathbf{C}(\mathbf{D}[\mathbf{AB}]) - (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}] - [[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}]$.

Сравнив оба выражения, получаем

$(\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] - (\mathbf{CB})[\mathbf{AD}] - [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}] = \mathbf{C}(\mathbf{D}[\mathbf{AB}]) - (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}] - [[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}]$.

Отсюда найдем

$\mathbf{C}(\mathbf{ABD}) = (\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] +(\mathbf{CB})[\mathbf{DA}] + (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}] + [[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}] - [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]$.

Эта формула очевидно не выражает произведение четвертого типа только через произведения второго типа. При этом отпадает возможность разложения векторов по трем векторным произведениям пар векторов.

Итак, мы показали, что все произведения четырех векторов не выражаются линейно через произведения только двух типов $(\mathbf{AB})(\mathbf{CD})$ и $(\mathbf{AB})[\mathbf{CD}]$.

Последнее тождество при циклической подстановке векторов позволяет получить полезное соотношение

$[\mathbf{ABCD}] = (\mathbf{BCD})\mathbf{A} - (\mathbf{CDA})\mathbf{B} + (\mathbf{DAB})\mathbf{C} - (\mathbf{ABC})\mathbf{D} =$

$= -2[\mathbf{ABCD}] + [[\mathbf{BCD}]\mathbf{A}] - [[\mathbf{CDA}]\mathbf{B}] + [[\mathbf{DAB}]\mathbf{C}] - [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]$,

а также соотношение

$-[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}] + [[\mathbf{BCD}]\mathbf{A}] - [[\mathbf{CDA}]\mathbf{B}] + [[\mathbf{DAB}]\mathbf{C}] = 3[\mathbf{ABCD}]$.

Анализ соотношения был бы неполным, если бы не удалось установить выражение тройного векторного произведения (или величины $[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]$) через более простые произведения. Выразив, например, ее первую координату как векторное произведение двух векторов

$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]_1=-\alpha([\mathbf{ABC}]_2D_3-[\mathbf{ABC}]_3D_2)-\alpha([\mathbf{ABC}]_4D_5-[\mathbf{ABC}]_5D_4)+\alpha^2([\mathbf{ABC}]_7D_6-[\mathbf{ABC}]_6D_7)$,

в координатной форме записи можно получить

$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]_1=(-A_1(\mathbf{BCD})-B_1(\mathbf{CAD})-C_1(\mathbf{ABD})+[\mathbf{AB}]_1(\mathbf{CD})+[\mathbf{BC}]_1(\mathbf{AD})+[\mathbf{CA}]_1(\mathbf{BD}))\mathbf{e}_1$

и аналогично остальные шесть координат этого произведения.

В результате имеем

$$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}] = \begin{vmatrix} [\mathbf{AB}] & \mathbf{C} \\ (\mathbf{ABD}) & (\mathbf{CD}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [\mathbf{BC}] & \mathbf{A} \\ (\mathbf{BCD}) & (\mathbf{AD}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [\mathbf{CA}] & \mathbf{B} \\ (\mathbf{CAD}) & (\mathbf{BD}) \end{vmatrix}$$

и кроме того

$$[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}]=-\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ (\mathbf{ACD}) & (\mathbf{BCD}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (\mathbf{AC}) & (\mathbf{BC}) \\ [\mathbf{AD}] & [\mathbf{BD}] \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} [\mathbf{AC}] & [\mathbf{BC}] \\ (\mathbf{AD}) & (\mathbf{BD}) \end{vmatrix}$$

при этом

$[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}] + [[\mathbf{BC}]\mathbf{AD}] + [[\mathbf{CA}]\mathbf{BD}] = [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]$.

Таким образом, рассматриваемые произведения сводятся к линейной комбинации произведений второго и четвертого типа. Поэтому следует считать основными четыре типа произведений четырех векторов:

1. $(\mathbf{AB})(\mathbf{CD})$;
2. $(\mathbf{AB})[\mathbf{CD}]$;
3. $(\mathbf{ABC})\mathbf{D}$;
4. $(\mathbf{ABCD})$.

Нетрудно показать, что при этом выполняются тождества Мальцева

$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{A}] = [\mathbf{AB}[\mathbf{AC}]]$

и Сейгла

$[[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}] + [[[\mathbf{BC}]\mathbf{D}]\mathbf{A}] + [[[\mathbf{CD}]\mathbf{A}]\mathbf{B}] + [[[\mathbf{DA}]\mathbf{B}]\mathbf{C}] = [[\mathbf{AC}][\mathbf{BD}]]$,

так что рассматриваемые алгебры относятся к алгебрам Мальцева, причем

$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{A}] = [\mathbf{AB}](\mathbf{CA}) + [\mathbf{BC}](\mathbf{AA}) + [\mathbf{CA}](\mathbf{BA}) - (\mathbf{ABC})\mathbf{A}$

и

$$[[\mathbf{AC}][\mathbf{BD}]] = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & [\mathbf{BC}] \\ (\mathbf{AD}) & (\mathbf{BCD}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{B} & [\mathbf{CD}] \\ (\mathbf{BA}) & (\mathbf{CDA}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{C} & [\mathbf{DA}] \\ (\mathbf{CB}) & (\mathbf{DAB}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{D} & [\mathbf{AB}] \\ (\mathbf{DC}) & (\mathbf{ABC}) \end{vmatrix},$$

причем, при $\alpha = 0$ функция Мальцева равна нулю.

В результате можно предложить модифицированную запись соотношения Мальцева на случай четырех произвольных векторов

$-[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]+[[\mathbf{BCD}]\mathbf{A}]-[[\mathbf{CDA}]\mathbf{B}]+[[\mathbf{DAB}]\mathbf{C}]=-3([\mathbf{AB}[\mathbf{CD}]]+[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}])=3[\mathbf{ABCD}]$.

Найдем квадрат смешанного произведения трех векторов, т.е.

$(\mathbf{ABC})^2=([\mathbf{AB}]\mathbf{C})^2$.

Его можно рассматривать как квадрат скалярного произведения двух векторов $[\mathbf{AB}]$ и $\mathbf{C}$.

Согласно основному тождеству для двух векторов квадрат скалярного произведения двух векторов равен произведению квадратов этих векторов минус квадрат их векторного произведения, поэтому

$(\mathbf{ABC})^2=[\mathbf{AB}]^2\mathbf{C}^2-[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2$.

Квадрат векторного произведения $[\mathbf{AB}]^2$ мы найдем, пользуясь основным тождеством для двух векторов

$[\mathbf{AB}]^2=\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2-(\mathbf{AB})^2$.

Для вычисления квадрата двойного векторного произведения $[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2$ воспользуемся формулой разложения

$[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2=(\mathbf{B}(\mathbf{CA})-\mathbf{A}(\mathbf{BC})-[\mathbf{ABC}])^2=\mathbf{B}^2(\mathbf{CA})^2-2(\mathbf{AB})(\mathbf{BC})(\mathbf{CA})+\mathbf{A}^2(\mathbf{BC})^2-$

$-2([\mathbf{ABC}](\mathbf{B}(\mathbf{CA})-\mathbf{A}(\mathbf{BC})))+[\mathbf{ABC}]^2=\mathbf{A}^2(\mathbf{BC})^2+\mathbf{B}^2(\mathbf{CA})^2-2(\mathbf{AB})(\mathbf{BC})(\mathbf{CA})+[\mathbf{ABC}]^2$.

Подставив все это в выражение для квадрата смешанного произведения, мы получим

$(\mathbf{ABC})^2=\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2-(\mathbf{AB})^2\mathbf{C}^2-\mathbf{A}^2(\mathbf{BC})^2-\mathbf{B}^2(\mathbf{CA})^2+2(\mathbf{AB})(\mathbf{BC})(\mathbf{CA})-[\mathbf{ABC}]^2$.

Эта формула является по существу искомой. Мы только приведем ее к более удобному для запоминания виду. Для этого перегруппируем члены так:

$(\mathbf{ABC})^2+[\mathbf{ABC}]^2=\mathbf{A}^2(\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2-(\mathbf{BC})^2)-(\mathbf{AB})((\mathbf{BA})\mathbf{C}^2-(\mathbf{BC})(\mathbf{CA}))+(\mathbf{AC})((\mathbf{BA})(\mathbf{CB})-(\mathbf{CA})\mathbf{B}^2)$.

Нетрудно видеть, что правая часть составляет определитель третьего порядка

$$(\mathbf{ABC})^2+[\mathbf{ABC}]^2=\begin{vmatrix}(\mathbf{AA}) & (\mathbf{AB}) & (\mathbf{AC})\\ (\mathbf{BA}) & (\mathbf{BB}) & (\mathbf{BC})\\ (\mathbf{CA}) & (\mathbf{CB}) & (\mathbf{CC})\end{vmatrix}.$$

Как мы видим, эта замечательная формула вместе с формулой двойного векторного произведения позволяет сводить многие вычисления к нахождению скалярных произведений.

Список литературы

1. **Коротков А. В.** Неевклидовы трехмерные векторные алгебры. 2003. 10 с.
2. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.

УДК 512.7
Физико-математические науки

В статье рассматриваются созданные в XIX веке наряду с евклидовой геометрией неевклидовые геометрические системы Лобачевского и Римана. Соответствующие этим геометриям векторные алгебры до сих пор не изучены, хотя эти геометрии широко используются в физических приложениях. Поэтому представляет значительный интерес рассмотрение векторных алгебр, не соответствующих геометрии Евклида, и, прежде всего, изучение процедур удвоения по отношению к двойным и дуальным числам.

Ключевые слова и фразы: скаляр; вектор; двойные числа; дуальные числа; скалярные произведения; векторные произведения; линейные векторные пространства; евклидовы семимерные векторные алгебры; неевклидовы семимерные векторные алгебры.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

НЕЕВКЛИДОВЫ ТРЕХМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ©

В начале XIX века обнаружилось, что самые разнообразные операции, производимые в алгебре, геометрии, механике, физике над различными объектами нечисловой природы, подчиняются законам обычной арифметики: сочетательности, переместительности и распределительности, и что эти объекты можно рассматривать как величины, к которым применимы алгебраические методы изучения. В связи с этим, системы объектов любой природы, над которыми установлены операции, сходные с арифметическими действиями над числами, стали рассматривать с позиции алгебры. Изучением одной из таких систем объектов занимается трехмерная векторная алгебра. Она возникла под влиянием задач евклидовой геометрии и механики, а затем получила широкое развитие в связи с учениями об электричестве и магнетизме, где приходится иметь дело с векторными