В результате можно предложить модифицированную запись соотношения Мальцева на случай четырех произвольных векторов

$-[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}] + [[\mathbf{BCD}]\mathbf{A}] - [[\mathbf{CDA}]\mathbf{B}] + [[\mathbf{DAB}]\mathbf{C}] = -3([\mathbf{AB}[\mathbf{CD}]] + [[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}]) = 3[\mathbf{ABCD}]$.

Найдем квадрат смешанного произведения трех векторов, т.е.

$(\mathbf{ABC})^2 = ([\mathbf{AB}]\mathbf{C})^2$.

Его можно рассматривать как квадрат скалярного произведения двух векторов $[\mathbf{AB}]$ и $\mathbf{C}$.

Согласно основному тождеству для двух векторов квадрат скалярного произведения двух векторов равен произведению квадратов этих векторов минус квадрат их векторного произведения, поэтому

$(\mathbf{ABC})^2 = [\mathbf{AB}]^2\mathbf{C}^2 - [[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2$.

Квадрат векторного произведения $[\mathbf{AB}]^2$ мы найдем, пользуясь основным тождеством для двух векторов

$[\mathbf{AB}]^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 - (\mathbf{AB})^2$.

Для вычисления квадрата двойного векторного произведения $[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2$ воспользуемся формулой разложения

$[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2 = (\mathbf{B}(\mathbf{CA}) - \mathbf{A}(\mathbf{BC}) - [\mathbf{ABC}])^2 = \mathbf{B}^2(\mathbf{CA})^2 - 2(\mathbf{AB})(\mathbf{BC})(\mathbf{CA}) + \mathbf{A}^2(\mathbf{BC})^2 -$

$-2([\mathbf{ABC}](\mathbf{B}(\mathbf{CA}) - \mathbf{A}(\mathbf{BC}))) + [\mathbf{ABC}]^2 = \mathbf{A}^2(\mathbf{BC})^2 + \mathbf{B}^2(\mathbf{CA})^2 - 2(\mathbf{AB})(\mathbf{BC})(\mathbf{CA}) + [\mathbf{ABC}]^2$.

Подставив все это в выражение для квадрата смешанного произведения, мы получим

$(\mathbf{ABC})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2 - (\mathbf{AB})^2\mathbf{C}^2 - \mathbf{A}^2(\mathbf{BC})^2 - \mathbf{B}^2(\mathbf{CA})^2 + 2(\mathbf{AB})(\mathbf{BC})(\mathbf{CA}) - [\mathbf{ABC}]^2$.

Эта формула является по существу искомой. Мы только приведем ее к более удобному для запоминания виду. Для этого перегруппируем члены так:

$(\mathbf{ABC})^2 + [\mathbf{ABC}]^2 = \mathbf{A}^2(\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2 - (\mathbf{BC})^2) - (\mathbf{AB})((\mathbf{BA})\mathbf{C}^2 - (\mathbf{BC})(\mathbf{CA})) + (\mathbf{AC})((\mathbf{BA})(\mathbf{CB}) - (\mathbf{CA})\mathbf{B}^2)$.

Нетрудно видеть, что правая часть составляет определитель третьего порядка

$$(\mathbf{ABC})^2 + [\mathbf{ABC}]^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{AA}) & (\mathbf{AB}) & (\mathbf{AC}) \\ (\mathbf{BA}) & (\mathbf{BB}) & (\mathbf{BC}) \\ (\mathbf{CA}) & (\mathbf{CB}) & (\mathbf{CC}) \end{vmatrix}.$$

Как мы видим, эта замечательная формула вместе с формулой двойного векторного произведения позволяет сводить многие вычисления к нахождению скалярных произведений.

*Список литературы*

1. **Коротков А. В.** Неевклидовы трехмерные векторные алгебры. 2003. 10 с.
2. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.

---

УДК 512.7
**Физико-математические науки**

*В статье рассматриваются созданные в XIX веке наряду с евклидовой геометрией неевклидовые геометрические системы Лобачевского и Римана. Соответствующие этим геометриям векторные алгебры до сих пор не изучены, хотя эти геометрии широко используются в физических приложениях. Поэтому представляет значительный интерес рассмотрение векторных алгебр, не соответствующих геометрии Евклида, и, прежде всего, изучение процедур удвоения по отношению к двойным и дуальным числам.*

*Ключевые слова и фразы:* скаляр; вектор; двойные числа; дуальные числа; скалярные произведения; векторные произведения; линейные векторные пространства; евклидовы семимерные векторные алгебры; неевклидовы семимерные векторные алгебры.

**Анатолий Васильевич Коротков**, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
*Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск*
*avkorotkov1945@yandex.ru*

## НЕЕВКЛИДОВЫ ТРЕХМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ©

В начале XIX века обнаружилось, что самые разнообразные операции, производимые в алгебре, геометрии, механике, физике над различными объектами нечисловой природы, подчиняются законам обычной арифметики: сочетательности, переместительности и распределительности, и что эти объекты можно рассматривать как величины, к которым применимы алгебраические методы изучения. В связи с этим, системы объектов любой природы, над которыми установлены операции, сходные с арифметическими действиями над числами, стали рассматривать с позиции алгебры. Изучением одной из таких систем объектов занимается трехмерная векторная алгебра. Она возникла под влиянием задач евклидовой геометрии и механики, а затем получила широкое развитие в связи с учениями об электричестве и магнетизме, где приходится иметь дело с векторными величинами, которые характеризуются не только своими числовыми значениями, но и направлениями в пространстве. В связи с этим, евклидовы геометрии нашли свои аналоги в векторном исчислении.

Вместе с тем, наряду с евклидовой геометрией, в XIX веке были созданы неевклидовы геометрические системы Лобачевского и Римана. Соответствующие этим геометриям векторные алгебры до сих пор не изучены, хотя эти геометрии широко используются в физических приложениях. Поэтому представляет значительный интерес рассмотрение векторных алгебр, не соответствующих геометрии Евклида, и, прежде всего, изучение процедур удвоения по отношению к двойным и дуальным числам [1].

На этом пути мы неизбежно придем к трем таблицам умножения базисных элементов трехмерных векторных алгебр в виде:

1.

| | $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{e}_1$ | 0 | $\mathbf{e}_3$ | $\alpha\mathbf{e}_2$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $-\mathbf{e}_3$ | 0 | $-\alpha\mathbf{e}_1$ |
| $\mathbf{e}_3$ | $-\alpha\mathbf{e}_2$ | $\alpha\mathbf{e}_1$ | 0 |

2.

| | $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{e}_1$ | 0 | $-\alpha\mathbf{e}_3$ | $-\mathbf{e}_2$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $\alpha\mathbf{e}_3$ | 0 | $\alpha^2\mathbf{e}_1$ |
| $\mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}_2$ | $-\alpha^2\mathbf{e}_1$ | 0 |

3.

| | $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{e}_1$ | 0 | $-\alpha\mathbf{e}_3$ | $\alpha\mathbf{e}_2$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $\alpha\mathbf{e}_3$ | 0 | $-\alpha\mathbf{e}_1$ |
| $\mathbf{e}_3$ | $-\alpha\mathbf{e}_2$ | $\alpha\mathbf{e}_1$ | 0 |

где $\alpha$ принимает значения $\pm 1$ или 0. Здесь $\alpha=-1$ соответствует трехмерным векторным алгебрам Гамильтона-Грассмана, $\alpha=1$ - алгебрам, отвечающим четырехмерному расширению двойных чисел, а $\alpha=0$ - алгебрам, отвечающим четырехмерному расширению дуальных чисел. Дальнейшим развитием рассматриваемых алгебраических схем могут быть восьмимерные расширения [2].

Целью настоящей работы является изучение выражений, которые можно составлять из векторов и скаляров при помощи операций трехмерной векторной алгебры. Основными и простейшими являются линейные комбинации векторов, скалярные и векторные произведения, а также произведения нескольких векторов.

Линейными операциями над векторами являются сложение векторов и умножение вектора на скаляр, определяемые свойствами трехмерного линейного векторного пространства:

1. ассоциативность сложения векторов

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

2. коммутативность сложения векторов

$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

3. наличие нулевого вектора

$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$;

4. наличие противоположного вектора

$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$.

При векторном сложении результат не зависит от порядка слагаемых, и сумму более чем двух векторов можно писать без скобок.

Действие умножение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

1. $a\mathbf{A}=\mathbf{A}a$;
2. $(ab)\mathbf{A}=a(b\mathbf{A})$;
3. $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$;
4. $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$.

В основе векторной алгебры лежат определения скалярного и векторного произведений двух векторов.

Скалярным произведением **(АВ)** двух векторов **А** и **В** назовем скаляр $(\mathbf{AB})=(A_i\mathbf{e}_i B_\kappa\mathbf{e}_\kappa)=A_iB_k(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k)=g_{ik}A_iB_k$, определяемый матрицами скалярных произведений векторов базиса вида:

1. $g_{ik}=\left\|\begin{matrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{matrix}\right\|$

2. $g_{ik}=\left\|\begin{matrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{matrix}\right\|$

3. $g_{ik}=\left\|\begin{matrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{matrix}\right\|$

так что

$(\mathbf{AB})=g_{ik}A_iB_k=g_{ii}A_iB_i$,т.е.

1. $(\mathbf{AB})=-\alpha A_1B_1-\alpha A_2B_2+\alpha^2A_3B_3$.
2. $(\mathbf{AB})=-\alpha A_1B_1-\alpha^3A_2B_2+\alpha^2A_3B_3$.
3. $(\mathbf{AB})=\alpha^2A_1B_1+\alpha^2A_2B_2+\alpha^2A_3B_3$.

Скалярный квадрат вектора **A** определяется соответственно равенством

$(\mathbf{AA})=-\alpha A_1^2-\alpha A_2^2+\alpha^2A_3^2=\mathbf{A}^2$,

так что скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора, причем модуль вектора

1. $A=\sqrt{-\alpha A_1^2-\alpha A_2^2+\alpha^2A_3^2}$,
2. $A=\sqrt{-\alpha A_1^2-\alpha^3A_2^2+\alpha^2A_3^2}$,
3. $A=\sqrt{\alpha^2A_1^2+\alpha^2A_2^2+\alpha^2A_3^2}$.

Очевидны свойства скалярного произведения двух векторов:

1. $(a\mathbf{AB})=a(\mathbf{AB})$;
2. $(\mathbf{AB})=(\mathbf{BA})$;
3. $(\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}))=(\mathbf{AB})+(\mathbf{AC})$;
4. два вектора **A** и **B** ортогональны, если выполняется условие $(\mathbf{AB})=0$.

Векторное произведение **[AB]** двух векторов **A** и **B** определяется матрицей векторных произведений векторов базиса, причем его можно записать в виде:

$[\mathbf{AB}]=[(A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3)(B_1\mathbf{e}_1+B_2\mathbf{e}_2+B_3\mathbf{e}_3)]$.

1. $[\mathbf{AB}]=-\alpha(A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{e}_1-\alpha(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{e}_2+(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{e}_3$,
2. $[\mathbf{AB}]=\alpha^2(A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{e}_1+(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{e}_2-\alpha(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{e}_3$,
3. $[\mathbf{AB}]=-\alpha(A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{e}_1-\alpha(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{e}_2-\alpha(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{e}_3$.

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде определителей:

1. $[\mathbf{AB}]=\begin{vmatrix} -\alpha e_1 & -\alpha e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

2. $[\mathbf{AB}]=\begin{vmatrix} \alpha^2 e_1 & e_2 & -\alpha e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

3. $[\mathbf{AB}]=\begin{vmatrix} -\alpha e_1 & -\alpha e_2 & -\alpha e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

Из свойств определителей следует, что:

1. $[a\mathbf{AB}]=a[\mathbf{AB}]$;
2. $[\mathbf{AB}]=-[\mathbf{BA}]$;
3. $[\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})]=[\mathbf{AB}]+[\mathbf{AC}]$;
4. $[a\mathbf{AA}]=\mathbf{0}$.

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны лишь следующие типы произведений:

1. **A(BC)** - простейшее произведение трех векторов;
2. **(A[BC])** - смешанное произведение трех векторов;
3. **[A[BC]]** - двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение **A(BC)** трех векторов **A**, **B** и **C** получается умножением скалярного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получается вектор, коллинеарный с третьим вектором. Из этого в общем случае вытекает неравенство **A(BC)≠(AB)C**, так что рассматриваемое векторное исчисление не ассоциативно.

Смешанное произведение **(A[BC])=(ABC)** трех векторов **A**, **B** и **C** получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию

1. $(\mathbf{A[BC]})=-\alpha A_1[BC]_1-\alpha A_2[BC]_2+\alpha^2 A_3[BC]_3$.

$(\mathbf{ABC})=\alpha^2 A_1(B_2C_3-B_3C_2)+\alpha^2 A_2(B_3C_1-B_1C_3)+\alpha^2 A_3(B_1C_2-B_2C_1)$;

2. $(\mathbf{A[BC]})=-\alpha A_1[BC]_1-\alpha^3 A_2[BC]_2+\alpha^2 A_3[BC]_3$.

$(\mathbf{ABC})=-\alpha^3 A_1(B_2C_3-B_3C_2)-\alpha^3 A_2(B_3C_1-B_1C_3)-\alpha^3 A_3(B_1C_2-B_2C_1)$;

3. $(\mathbf{A[BC]})=-\alpha A_1[BC]_1-\alpha A_2[BC]_2-\alpha A_3[BC]_3$.

$(\mathbf{ABC})=-\alpha^3 A_1(B_2C_3-B_3C_2)-\alpha^3 A_2(B_3C_1-B_1C_3)-\alpha^3 A_3(B_1C_2-B_2C_1)$.

Смешанное произведение трех векторов можно представить в виде определителей:

1. $$(\mathbf{ABC})=\alpha^2 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

2. $$(\mathbf{ABC})=-\alpha^3 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

3. $$(\mathbf{ABC})=-\alpha^3 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Из свойств определителей следует, что:

1. (a**ABC**)= a(**ABC**);
2. смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. **(AB(C+D))=(ABC)+(ABD)**;
4. если два вектора **A** и **B** в смешанном произведении трех векторов коллинеарные, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов **([AB]A)=0**. Если три вектора **A**, **B** и **C=A+B** компланарны, то выполняется равенство **(ABC)=(AB(A+B))=0**.

Двойное векторное произведение **[A[BC]]** трех векторов **A**, **B** и **C** получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор

$\mathbf{[A[BC]]=[AD]=E}=E_1\mathbf{e}_1+E_2\mathbf{e}_2+E_3\mathbf{e}_3$.

В координатной форме записи для первой координаты двойного векторного произведения имеет место соотношение

1. $E_1= -\alpha(A_2D_3-A_3D_2) = -\alpha A_2(B_1C_2-B_2C_1)-\alpha^2 A_3(B_3C_1-B_1C_3) =$

$= B_1(-\alpha C_1A_1- \alpha C_2A_2+\alpha^2 C_3A_3)-C_1(-\alpha A_1B_1-\alpha A_2B_2+\alpha^2 A_3B_3)$;

2. $E_1= \alpha^2(A_2D_3-A_3D_2) = -\alpha^3 A_2(B_1C_2-B_2C_1)-\alpha^2 A_3(B_3C_1-B_1C_3) =$

$= B_1(-\alpha C_1A_1- \alpha^3 C_2A_2+\alpha^2 C_3A_3)-C_1(-\alpha A_1B_1-\alpha^3 A_2B_2+\alpha^2 A_3B_3)$;

3. $E_1= -\alpha(A_2D_3-A_3D_2) = \alpha^2 A_2(B_1C_2-B_2C_1)-\alpha^2 A_3(B_3C_1-B_1C_3) =$

$= B_1(\alpha^2 C_1A_1+\alpha^2 C_2A_2+\alpha^2 C_3A_3)-C_1(\alpha^2 A_1B_1+\alpha^2 A_2B_2+\alpha^2 A_3B_3)$,

т.е. $E_1 = B_1\mathbf{(CA)}- C_1\mathbf{(AB)}$.

Аналогично, для других координат:

$E_2 = B_2\mathbf{(CA)}-C_2\mathbf{(AB)}$

$E_3 = B_3\mathbf{(CA)}-C_3\mathbf{(AB)}$.

Таким образом, окончательно запишем

**[A[BC]] = B(CA)-C(AB)**.

Подобным образом можно получить соотношение

**[[AB]C] = [C[BA]] = B(CA)-A(BC)**.

Используя циклические подстановки векторов, получим

**[A[BC]]+[B[CA]]+[C[AB]]=0**

и **[[AB]C]+[[BC]A]+[[CA]B]=0**,

так что в рассматриваемых алгебрах выполняется соотношение Якоби, они не ассоциативны и относятся к классу алгебр Ли.

Все произведения четырех векторов можно получить следующими двумя способами:

- умножением произведения трех векторов на четвертый вектор;
- умножением произведения двух векторов на произведение двух векторов.

В соответствии с этим, возможны следующие типы произведений:

| | | |
|---|---|---|
| **((AB)CD)** | **(AB)(CD)** | **(ABC)D** |
| **[(AB)CD]** | **(AB)[CD]** | |
| **([[AB]C]D)** | **([AB][CD])** | |
| **[[[AB]C]D]** | **[[AB][CD]]** | |

Не все девять получившихся произведений различны между собой. Действительно, во-первых, мы знаем, что скалярный множитель можно выносить за знак скалярного и векторного произведений двух векторов. Поэтому

**((AB)CD) = (AB)(CD)**

**[(AB)CD] = (AB)[CD]**

Во-вторых, считая векторное произведение **[AB]** за один вектор, мы можем рассматривать **([[AB]C]D)** как смешанное произведение трех векторов **[AB]**, **C** и **D**. Применив к нему закон сочетательности, получим

**([[AB]C]D) = ([AB][CD])**

Итак, остаются только шесть типов произведений четырех векторов

1. **((AB)CD) = (AB)(CD)**;
2. **[(AB)CD] = (AB)[CD]**;
3. **([[AB]C]D) = ([AB][CD])**;
4. **([AB]C)D = (ABC)D**;
5. **[[AB][CD]]**;
6. **[[[AB]C]D]**.

Мы покажем теперь, что четыре последних произведения являются линейными комбинациями из произведений первых двух типов, которые следует считать основными.

Скалярное произведение двух векторов **[AB]** и **[CD]**, как уже отмечалось, является смешанным произведением трех векторов **([[AB]C]D)**. На основании закона сочетательности мы можем для вычисления этого произведения перемножить векторно два первых множителя **[AB]** и **C** и результат умножить скалярно на третий множитель, следовательно

**([AB][CD]) = ([[AB]C]D)**.

Развернув получившееся в скобках двойное векторное произведение трех векторов по формуле разложения, мы получим

**([AB][CD]) = ((B(AC)-A(BC))D)**

или, раскрыв скобки

$$([\mathbf{AB}][\mathbf{CD}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{AC}) & (\mathbf{BC}) \\ (\mathbf{AD}) & (\mathbf{BD}) \end{vmatrix}$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение третьего типа, выражается через произведение первого типа.

При этом, циклическая подстановка векторов дает:

**([AB][CD]) +([BC][AD]) + ([CA][BD]) = 0**.

Как частный случай, при **C**=**A** и **D**=**B**, мы имеем основное тождество для двух векторов

$$[\mathbf{AB}]^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{AA}) & (\mathbf{BA}) \\ (\mathbf{AB}) & (\mathbf{BB}) \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение двух векторных произведений **[[AB][CD]]** можно преобразовать двумя способами: во-первых, рассматривая это произведение как двойное векторное произведение трех векторов **[AB]**, **C** и **D** мы получим

**[[AB][CD]] = C(D[AB])-D([AB]C)**.

Во-вторых, рассматривая то же произведение как двойное векторное произведение трех векторов **A**, **B** и **[CD]**, мы получим:

**[[AB][CD]] = B([CD]A)-A(B[CD])**.

Таким образом, векторное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение пятого типа, выражается через произведение четвертого типа. Сравнив оба выражения для одного и того же произведения **[[AB][CD]]**, мы получим

**C(D[AB])-D([AB]C) = B([CD]A)-A(B[CD])**

или

**A(BCD) - B(CDA) + C(DAB)-D(ABC) = 0**

При этом появляется возможность разложения вектора по трем векторам

$\mathbf{D} = (\mathbf{ABC})^{-1}(\mathbf{A}(\mathbf{BCD}) - \mathbf{B}(\mathbf{CDA}) + \mathbf{C}(\mathbf{DAB}))$.

Тройное векторное произведение четырех векторов $[[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}]$ можно также преобразовать двумя способами.

Во-первых, разложив двойное векторное произведение внутри скобок и умножив векторно на четвертый вектор, получим

$[[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}] = (\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] - (\mathbf{CB})[\mathbf{AD}]$.

Во-вторых, разложив тройное векторное произведение четырех векторов, получим

$[[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}] = \mathbf{C}(\mathbf{D}[\mathbf{AB}]) - (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}]$.

Сравнив оба выражения, получаем

$(\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] - (\mathbf{CB})[\mathbf{AD}] = \mathbf{C}(\mathbf{D}[\mathbf{AB}]) - (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}]$.

Отсюда найдем

$\mathbf{C}(\mathbf{ABD}) = (\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] + (\mathbf{CB})[\mathbf{DA}] + (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}]$.

Эта формула очевидно выражает произведение четвертого типа только через произведения второго типа.

Итак, мы показали, что все произведения четырех векторов выражаются линейно через произведения только двух типов:

$(\mathbf{AB})(\mathbf{CD})$ и $(\mathbf{AB})[\mathbf{CD}]$.

Нетрудно показать, что при этом выполняется тождество Сейгла

$[[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}] + [[\mathbf{BC}]\mathbf{D}]\mathbf{A}] + [[[\mathbf{CD}]\mathbf{A}]\mathbf{B}] + [[[\mathbf{DA}]\mathbf{B}]\mathbf{C}] = [[\mathbf{AC}][\mathbf{BD}]]$,

причем

$$[[\mathbf{AC}][\mathbf{BD}]] = \begin{vmatrix} \mathbf{A}\ [\mathbf{BC}] \\ (\mathbf{AD})\ (\mathbf{BCD}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{B}\ [\mathbf{CD}] \\ (\mathbf{BA})\ (\mathbf{CDA}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{C}\ [\mathbf{DA}] \\ (\mathbf{CB})(\mathbf{DAB}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{D}\ [\mathbf{AB}] \\ (\mathbf{DC})(\mathbf{ABC}) \end{vmatrix}.$$

Найдем квадрат смешанного произведения трех векторов, т.е.

$(\mathbf{ABC})^2 = ([\mathbf{AB}]\mathbf{C})^2$.

Его можно рассматривать как квадрат скалярного произведения двух векторов $[\mathbf{AB}]$ и $\mathbf{C}$.

Согласно основному тождеству для двух векторов квадрат скалярного произведения двух векторов равен произведению квадратов этих векторов минус квадрат их векторного произведения, поэтому

$(\mathbf{ABC})^2 = [\mathbf{AB}]^2\mathbf{C}^2 - [[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2$.

Квадрат векторного произведения $[\mathbf{AB}]^2$ мы найдем, пользуясь основным тождеством для двух векторов

$[\mathbf{AB}]^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 - (\mathbf{AB})^2$.

Для вычисления квадрата двойного векторного произведения $[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2$ воспользуемся формулой разложения

$[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2 = (\mathbf{B}(\mathbf{CA}) - \mathbf{A}(\mathbf{BC}))^2 = \mathbf{B}^2(\mathbf{CA})^2 - 2(\mathbf{AB})(\mathbf{BC})(\mathbf{CA}) + \mathbf{A}^2(\mathbf{BC})^2$.

Подставив все это в выражение для квадрата смешанного произведения, мы получим

$(\mathbf{ABC})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2 - (\mathbf{AB})^2\mathbf{C}^2 - \mathbf{A}^2(\mathbf{BC})^2 - \mathbf{B}^2(\mathbf{CA})^2 + 2(\mathbf{AB})(\mathbf{BC})(\mathbf{CA})$.

Эта формула является по существу искомой. Мы только приведем ее к более удобному для запоминания виду. Для этого перегруппируем члены так:

$(\mathbf{ABC})^2 = \mathbf{A}^2(\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2 - (\mathbf{BC})^2) - (\mathbf{AB})((\mathbf{BA})\mathbf{C}^2 - (\mathbf{BC})(\mathbf{CA})) + (\mathbf{AC})((\mathbf{BA})(\mathbf{CB}) - (\mathbf{CA})\mathbf{B}^2)$.

Нетрудно видеть, что правая часть составляет определитель третьего порядка

$$(\mathbf{ABC})^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{AA}) & (\mathbf{AB}) & (\mathbf{AC}) \\ (\mathbf{BA}) & (\mathbf{BB}) & (\mathbf{BC}) \\ (\mathbf{CA}) & (\mathbf{CB}) & (\mathbf{CC}) \end{vmatrix}$$

Как мы видим, эта замечательная формула вместе с формулой двойного векторного произведения позволяет сводить многие вычисления к нахождению скалярных произведений.

Всякое произведение пяти векторов мы можем получить одним из двух способов:

- умножением произведения четырех векторов на пятый вектор;
- умножением произведения трех векторов на произведение двух векторов.

Можно показать, что всякое произведение пяти векторов линейно выражается через произведения следующих трех типов:

1. $(\mathbf{AB})(\mathbf{CD})\mathbf{E}$;
2. $(\mathbf{ABC})(\mathbf{DE})$;
3. $(\mathbf{ABC})[\mathbf{DE}]$.

Соответственно, всякое произведение шести векторов получается одним из трех способов:

- умножением произведения пяти векторов на шестой вектор;
- умножением произведения четырех векторов на произведение двух векторов;
- умножением произведения трех векторов на произведение трех векторов.

Можно показать также, что всякое произведение шести векторов является линейной комбинацией из произведений следующих типов:

1. $(\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{EF})$;
2. $(\mathbf{AB})(\mathbf{CD})[\mathbf{EF}]$;
3. $(\mathbf{ABC})(\mathbf{DEF})$.

Покажем, например, что произведения пяти векторов **(ABC)[DE]** и шести векторов **(ABC)(DEF)** линейно выражаются через соответствующие произведения **(AB)(CD)E** и **(AB)(CD)(EF)**. Имеем:

**(ABC)[DE] = A([BC][DE])-B([AC][DE])+C([AB][DE])**.

Отсюда, на основании формулы для скалярного произведения двух векторных произведений, следует:

$$\mathbf{(ABC)[DE]} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{(AD)} & \mathbf{(BD)} & \mathbf{(CD)} \\ \mathbf{(AE)} & \mathbf{(BE)} & \mathbf{(CE)} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, это произведение действительно выражается через произведение первого типа **(AB)(CD)E**.

Если векторы **A**, **B**, **C** не компланарны, то из этой формулы получается формула разложения векторного произведения **[DE]** по трем некомпланарным векторам

$$\mathbf{[DE]} = \mathbf{(ABC)}^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{(AD)} & \mathbf{(BD)} & \mathbf{(CD)} \\ \mathbf{(AE)} & \mathbf{(BE)} & \mathbf{(CE)} \end{vmatrix}.$$

Полученная формула является обобщением формулы, выражающей векторное произведение двух векторов через координатные орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Умножив скалярно на вектор **F** обе части полученной формулы, будем иметь:

$$\mathbf{(ABC)(DEF)} = \begin{vmatrix} \mathbf{(AF)} & \mathbf{(BF)} & \mathbf{(CF)} \\ \mathbf{(AD)} & \mathbf{(BD)} & \mathbf{(CD)} \\ \mathbf{(AE)} & \mathbf{(BE)} & \mathbf{(CE)} \end{vmatrix}.$$

Эта формула является обобщением полученной выше формулы для квадрата смешанного произведения $\mathbf{(ABC)}^2$, если положить **F**=**A**, **D**=**B**, **E**=**C**.

Найдем также коэффициенты разложения любой векторной функции **D** по трем некомпланарным векторам **A**, **B**, **C**, т.е.

$\mathbf{D} = D_1\mathbf{A}+D_2\mathbf{B}+D_3\mathbf{C}$.

Умножим скалярно обе части этой формулы на **[BC]**.

Учитывая, что смешанное произведение трех векторов, содержащее два одинаковых множителя, равно нулю, мы получим

$\mathbf{(BCD)} = D_1\mathbf{(ABC)}$.

Отсюда находим

$D_1 = \mathbf{(ABC)}^{-1}\ \mathbf{(BCD)}$.

Аналогично получим

$D_2 = \mathbf{(BCA)}^{-1}\ \mathbf{(CAD)}$.

$D_3 = \mathbf{(CAB)}^{-1}\ \mathbf{(ABD)}$.

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$\mathbf{D} = \mathbf{(ABC)}^{-1}\ (\mathbf{(BCD)A}+\mathbf{(CAD)B}+\mathbf{(ABD)C})$.

Таким образом, основные соотношения полученных алгебр воспроизводят соотношения векторной алгебры Гамильтона-Грассмана [3]. В то же время, в координатной форме все соотношения этих алгебр расписываются совершенно иным способом.

Отметим, что для алгебр, соответствующих $\alpha=0$, имеет место ненулевое значение в двух из них лишь для векторного произведения двух векторов, причем они изоморфны. Остальные функции при этом обращаются в нуль. В то же время алгебры, соответствующие $\alpha=\pm1$, не изоморфны в силу отличия знаков смешанного произведения трех векторов.

*Список литературы*

1. **Кантор И. Л., Солодовников А. С.** Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
2. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
3. **Лаптев Г. Ф.** Элементы векторного исчисления. М.: Наука, 1975. 336 с.