Коротков Анатолий Васильевич
СИММЕТРИЧЕСКИЕ СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ В СЕМИМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

В статье рассматриваются полилинейные симметрические и антисимметрические скалярные и векторные функции и формы применительно к семимерному векторному исчислению. Указаны функции и формы для двух, трех, четырех, пяти, шести и семи векторов. Вводится понятие расстояния между 3-7 точками, а также косинуса угла между 3-7 векторами.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2012. № 9 (64). C. 119-120. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/9/

УДК 512.7
Физико-математические науки

В статье рассматриваются полилинейные симметрические и антисимметрические скалярные и векторные функции и формы применительно к семимерному векторному исчислению. Указаны функции и формы для двух, трех, четырех, пяти, шести и семи векторов. Вводится понятие расстояния между 3-7 точками, а также косинуса угла между 3-7 векторами.

Ключевые слова и фразы: симметрические, полилинейные, скалярные, векторные функции, формы; произведения двух, трех, четырех, пяти, шести, семи векторов.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

СИММЕТРИЧЕСКИЕ СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ В СЕМИМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ©

Наряду с антисимметрическими скалярными и векторными функциями *n* векторов, в семимерной векторной алгебре [1] можно определить симметрические скалярные и векторные функции *n* векторов (n≤7). Таковой является, в частности, билинейная скалярная функция - скалярное произведение двух векторов (**AB**), определяющее модули |**A**| и |**B**| обоих векторов, расстояние d (**A, B**) = |**A** - **B**| между двумя точками и угол между двумя векторами Cos (**A, B**) = (**AB**) / |**A**| |**B**|.

Эта скалярная функция двух векторов полностью определяет метрические свойства пространства, условия ортогональности векторов, обладает свойствами линейности и дистрибутивности. Антисимметрическая векторная функция двух векторов - векторное произведение двух векторов **[AB]** - завершает круг функций над двумя векторами, поскольку в них задействованы все 7+42 = 49 комбинаций двух единичных векторов.

Для произведений трех векторов в семимерной векторной алгебре также определены антисимметрические скалярные и векторные функции трех векторов - смешанное **(ABC)** и векторное **[ABC]** произведения трех векторов. Циклическая подстановка над простейшим произведением трех векторов (**AB**)**C** определяет также симметрическую по перестановке любой пары векторов векторную функцию трех векторов.

[**ABC**] = 1/3 ((**AB**)**C** + (**BC**)**A** + (**CA**)**B**).

В то же время определить симметрическую по перестановке любой пары векторов скалярную функцию трех векторов не удается, поскольку в перечисленных функциях задействованы все 42+168+133=343 комбинации трех единичных векторов.

Для произведений четырех векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции четырех векторов - смешанное **(ABCD)** и векторное **[ABCD]** произведения четырех векторов. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях четырех векторов задействованы лишь 168+672=840 комбинаций четырех единичных векторов, так что возможно построение симметрических функций. Таковой, в частности, является скалярная симметрическая функция четырех векторов

(**ABCD**) = ([**ABC**]**D**) = 1/3 ((**AB**)(**CD**) + (**BC**)(**AD**) + (**CA**)(**BD**)),

определяемая произведениями скалярных билинейных функций, повторяющая их свойства в части линейности и дистрибутивности, определяющая модули каждого из четырех векторов и обращающаяся в нуль, когда три из них ортогональны четвертому. В ней задействованы 133 комбинации единичных векторов, поэтому можно вести речь также об определении симметрической векторной функции четырех векторов. Таковой является функция

[**ABCD**] = **[[ABC]D]** + **[[BCD]A]** + **[[CDA]B]** + **[[DAB]C]** = 1/3 ((**AB**)**[CD]** + (**BC**)**[AD]** + (**CA**)**[BD]** + (**BC**)**[DA]** + (**CD**)**[BA]** + (**DB**)**[CA]** + (**CD**)**[AB]** + (**DA**)**[CB]** + (**AC**)**[DB]** + (**DA**)**[BC]** + (**AB**)**[DC]** + (**BD**)**[AC]**) **=** 0.

В ней задействованы остальные 1428 комбинаций четырех единичных векторов (168+672+133+1428=2401), причем симметрическая векторная функция четырех векторов равна нулю.

Для произведений пяти векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции пяти векторов - смешанное **(ABCDE)** и векторное **[ABCDE]** произведения пяти векторов, причем **(ABCDE)**=0. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях пяти векторов задействованы не все из 16807 комбинаций единичных векторов, так что возможно построение симметрических скалярных и векторных функций. Таковой, в частности, является симметрическая векторная функция пяти векторов

[**ABCDE**] = 1/5((**ABCD**)**E**+(**BCDE**)**A**+(**CDEA**)**B**+(**DEAB**)**C**+(**EABC**)**D** = 1/15((**AB**)(**CD**)**E**+(**BC**)(**DE**)**A**+ +(**CD**)(**EA**)**B**+(**DE**)(**AB**)**C**+(**EA**)(**BC**)**D**+(**BC**)(**AD**)**E**+(**CD**)(**BE**)**A**+(**DE**)(**CA**)**B**+(**EA**)(**DB**)**C**+(**AB**)(**EC**)**D**+ +(**CA**)(**BD**)**E**+(**DB**)(**CE**)**A**+(**EC**)(**DA**)**B**+(**AD**)(**EB**)**C**+(**BE**)(**AC**)**D**).

В антисимметрической и симметрической векторных функциях пяти векторов задействованы 2520+637=3157 единичных векторов. Остальные 13650 комбинаций единичных векторов задействованы в определении смешанного произведения пяти векторов, так что скалярную симметрическую функцию пяти векторов определить невозможно.

Для произведений шести векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции шести векторов - смешанное **(ABCDEF)** и векторное **[ABCDEF]** произведения шести векторов. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях шести векторов задействованы не все из 117649 комбинаций шести единичных векторов, так что возможно построение скалярных и векторных симметрических функций шести векторов. Таковой, в частности, является скалярная симметрическая функция шести векторов

(**ABCDEF**) = ([**ABCDE**]**F**) = (1/15)× ((**AB**)(**CD**)(**EF**)+(**BC**)(**DE**)(**AF**)+(**CD**)(**EA**)(**BF**)+(**DE**)(**AB**)(**CF**) +(**EA**)(**BC**)(**DF**)+(**BC**)(**AD**)(**EF**)+(**CD**)(**BE**)(**AF**)+(**DE**)(**CA**)(**BF**)+(**EA**)(**DB**)(**CF**)+(**AB**)(**EC**)(**DF**)+ +(**CA**)(**BD**)(**EF**)+(**DB**)(**CE**)(**AF**)+(**EC**)(**DA**)(**BF**)+(**AD**)(**EB**)(**CF**)+(**BE**)(**AC**)(**DF**)),

определяемая произведениями скалярных билинейных функций, повторяющая их свойства в части линейности и дистрибутивности, определяющая модули каждого из шести векторов и обращающаяся в нуль, когда пять из них ортогональны шестому. Можно вести речь также об определении симметрической векторной функции шести векторов. Таковой является функция

[**ABCDEF**]=[[**ABCDE**]**F**]+[[**BCDEF**]**A**]+[[**CDEFA**]**B**]+[[**DEFAB**]**C**]+[[**EFABC**]**D**]+[[**FABCD**]**E**] = 1/105 ((**ABCD**)[**EF**]+(**BCDE**)[**FA**]+(**CDEF**)[**AB**]+(**DEFA**)[**BC**]+(**EFAB**)[**CD**]+(**FABC**)[**BE**]+(**BCDE**)[**AF**]+(**CDEF**)[**BA**]+(**DEFA**)[**CB**]+(**EFAB**)[**DC**]+(**FABC**)[**ED**]+(**ABCD**)[**CE**]+(**CDEA**)[**BF**]+(**DEFB**)[**CA**]+(**EFAC**)[**DB**]+ (**FFBD**)[**EC**]+(**ABCE**)[**FD**]+(**BCDF**)[**DE**]+(**DEAB**)[**CF**]+(**EFBC**)[**DA**]+(**FACD**)[**EB**]+(**ABDE**)[**FC**]+(**BCEF**) [**AD**]+(**CDFA**)[**FE**]+(**EABC**)[**DF**]+(**FBCD**)[**EA**]+(**ACDE**)[**FB**]+(**BDEF**)[**AC**]+(**CEFA**)[**BD**]+(**DFAB**)[**AE**])=0,

обращающаяся, однако, в нуль.

Для произведений семи векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции семи векторов - смешанное **(ABCDEFG)** и векторное **[ABCDEFG]** произведения семи векторов, причем **[ABCDEFG]**=0. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях семи векторов задействованы не все из 823543 комбинаций единичных векторов, так что возможно построение симметрических скалярных и векторных функций. Таковой, в частности, является симметрическая векторная функция семи векторов

[**ABCDEFG**]=1/7((**ABCDEF**)**G**+(**BCDEFG**)**A**+(**CDEFGA**)**B**+(**DEFGAB**)**C**+(**EFGABC**)**D**+(**FGABCD**)**E**+ (**GABCDE**)**F**),

состоящая из 105 слагаемых вида (**AB**)(**CD**)(**EF**)**G**, определяемая скалярными произведениями пар векторов. Построить симметрическую скалярную функцию семи векторов не удается.

Таким образом, в семимерной векторной алгебре имеется следующая классификация произведений векторов

Число векторов			2	3	4	5	6	7
Функции	Скал.	Сим.	(**AB**)	-	(**ABCD**)	-	(**ABCDEF**)	-
		Антисим.	-	**(ABC)**	**(ABCD)**	**(ABCDE)**=0	**(ABCDEF)**=0	**(ABCDEFG)**
	Вект.	Сим.	-	[**ABC**]	[**ABCD**]=0	[**ABCDE**]	[**ABCDEF**]=0	[**ABCDEFG**]
		Антисим.	**[AB]**	**[ABC]**	**[ABCD]**	**[ABCDE]**	**[ABCDEF]**	**[ABCDEFG]**=0

Отметим, что полилинейные симметрические скалярные и векторные функции являются функциями билинейной симметрической формы - скалярного произведения двух векторов, полностью определяющей метрические свойства векторного пространства. По этой причине им не следует отводить фундаментальную роль в определении метрики пространств. Более того, полилинейные симметрические скалярные функции определены лишь для четного числа векторов, а симметрические полилинейные скалярные функции для нечетного числа векторов определить невозможно.

Список литературы

1. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.