Коротков Анатолий Васильевич

СОСТАВНЫЕ СЕМИМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ

В работе рассмотрены основные свойства неизвестных ранее базовых соотношений семимерной векторной алгебры, в том числе алгебры составного типа - векторных произведений двух и трёх векторов, матриц преобразований вращения, изовекторного и спинорного исчислений. В ближайшем будущем мы станем свидетелями подтверждения либо опровержения применимости семимерной алгебры к описанию картины физического мира. В частности, в последнее время найдена предсказанная раннее в семимерии частица с очарованием C=2.

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2012. № 11 (66). C. 99-115. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/11/

УДК 512.7
Физико-математические науки

В работе рассмотрены основные свойства неизвестных ранее базовых соотношений семимерной векторной алгебры, в том числе алгебры составного типа - векторных произведений двух и трёх векторов, матриц преобразований вращения, изовекторного и спинорного исчислений. В ближайшем будущем мы станем свидетелями подтверждения либо опровержения применимости семимерной алгебры к описанию картины физического мира. В частности, в последнее время найдена предсказанная раннее в семимерии частица с очарованием С=2.

Ключевые слова и фразы: векторная алгебра; семимерная составная алгебра; векторное произведение двух и трёх векторов; матрицы семимерных преобразований вращения; изовекторное и спинорное семимерное исчисление; тензоры поля восьмимерного пространства-времени.

Анатолий Васильевич Коротков, к.т.н., д.ф.-м.н., доцент
Международный центр теоретической физики, г. Новочеркасск
avkorotkov1945@yandex.ru

СОСТАВНЫЕ СЕМИМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ©

Операторы электрического, барионного, гиперзаряда и странности в Q7 и SV6 симметриях имеют более сложную «составную» структуру в сравнении с операторами момента импульса. Это создает предпосылки для изучения свойств составных векторных алгебр, соответствующих семипараметровым семимерным ортогональным и шестимерным унитарным преобразованиям. В результате выявлены три семимерные векторные алгебры, отличающиеся в координатной форме записи от изученной ранее алгебры [1].

1. Векторная алгебра с векторным произведением двух векторов вида:

$$[AB]=[(A_1e_1+A_2e_2+\ldots+A_7e_7)(B_1e_1+B_2e_2+\ldots+B_7e_7)]=(A_6B_4-A_4B_6+A_3B_7-A_7B_3+A_5B_2-A_2B_5)\mathbf{e}_1+$$
$$+(A_1B_5-A_5B_1+A_6B_3-A_3B_6+A_7B_4-A_4B_7)\mathbf{e}_2+(A_7B_1-A_1B_7+A_5B_4-A_4B_5+A_2B_6-A_6B_2)\mathbf{e}_3+$$
$$+(A_2B_7-A_7B_2+A_1B_6-A_6B_1+A_3B_5-A_5B_3)\mathbf{e}_4+(A_4B_3-A_3B_4+A_2B_1-A_1B_2+A_6B_7-A_7B_6)\mathbf{e}_5+$$
$$+(A_3B_2-A_2B_3+A_7B_5-A_5B_7+A_4B_1-A_1B_4)\mathbf{e}_6+(A_5B_6-A_6B_5+A_4B_2-A_2B_4+A_1B_3-A_3B_1)\mathbf{e}_7$$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$$[AB]=|164|+|215|+|371|+|427|+|543|+|632|+|756|$$

где символом $|ijk|$ обозначен определитель вида:

$$|ijk|=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \\ A_i & A_j & A_k \\ B_i & B_j & B_k \end{vmatrix}$$

В результате векторное произведение двух векторов, а также смешанное (A[BC]) и двойное векторное [A[BC]] произведения векторов (а вслед за этим их иные комбинации) сохраняют свойства семимерной векторной алгебры. Изменяется лишь координатное значение величин. Так, для рассматриваемой алгебры

$$[ABC] = |3752|+|6374|+|5426|+|1635|+|2167|+|7541|+|4213|$$

где символом $|ijkl|$ обозначен определитель вида:

$$|ijkl|=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_l \\ A_i & A_j & A_k & A_l \\ B_i & B_j & B_k & B_l \\ C_i & C_j & C_k & C_l \end{vmatrix}$$

При этом, как обычно,

[A[BC]] = (CA)B-(AB)C+[ABC]

Следующие семь ортогональных матриц преобразования описывают правые вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$A_{1(\varphi)}=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{2(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{3(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{4(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{5(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{6(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{7(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

При этом:

$A_{i(\varphi)}^{-1} = A_i(\varphi)'$ (i=1,2,...,7)

Вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси с направляющими косинусами C_1, …., C_7 определяется антисимметричной матрицей

$$dA=(\partial a_{ik}/\partial\delta\,|_{\delta=0})d\delta = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} 0 & C_5 & -C_7 & C_6 & -C_2 & -C_4 & C_3 \\ -C_5 & 0 & C_6 & C_7 & C_1 & -C_3 & -C_4 \\ C_7 & -C_6 & 0 & C_5 & -C_4 & C_2 & -C_1 \\ \hline -C_6 & -C_7 & -C_5 & 0 & C_3 & C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_1 & C_4 & -C_3 & 0 & -C_7 & C_6 \\ C_4 & C_3 & -C_2 & -C_1 & C_7 & 0 & -C_5 \\ -C_3 & C_4 & C_1 & -C_2 & -C_6 & C_5 & 0 \end{array} \right\| d\delta$$

При этом

$d\mathbf{x}'=(dA)\mathbf{x}=[\mathbf{cx}\,]\,d\delta$

где $\mathbf{c}= C_1\mathbf{e}_1+\ldots+ C_7\mathbf{e}_7$ - единичный вектор в направлении положительной оси вращения, а $[\mathbf{cx}\,]$ - векторное произведение векторов **c** и **x**.

Матрицы бесконечно малых вращений вокруг осей (генераторы группы) $L_j=i(\partial/\partial\varphi_j)A_{j(\varphi)}\big|_{\varphi=0}$ имеют вид:

$$L_5=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{array}\right\| \qquad L_6=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$L_4=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \qquad L_2=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$L_1=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \qquad L_3=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$L_7=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы удовлетворяют (перестановочным) соотношениям:

$L_6L_4-L_4L_6+L_3L_7-L_7L_3+L_5L_2-L_2L_5 = -3iL_1$; $L_1L_5-L_5L_1+L_6L_3-L_3L_6+L_7L_4-L_4L_7 = -3iL_2$

$L_7L_1-L_1L_7+L_5L_4-L_4L_5+L_2L_6-L_6L_2 = -3iL_3$; $L_2L_7-L_7L_2+L_1L_6-L_6L_1+L_3L_5-L_5L_3 = -3iL_4$

$L_4L_3-L_3L_4+L_2L_1-L_1L_2+L_6L_7-L_7L_6 = -3iL_5$; $L_3L_2-L_2L_3+L_7L_5-L_5L_7+L_4L_1-L_1L_4 = -3iL_6$

$L_5L_6-L_6L_5+L_4L_2-L_2L_4+L_1L_3-L_3L_1 = -3iL_7$

При этом симметричная матрица $L^2= \sum L_i^2 = 6I$ коммутирует со всеми генераторами L_i, так что L^2 представляет собой оператор Казимира. Он не нарушает сохранение изоспина и отвечает сохраняющейся физической величине.

Матрицы L_i аналогичны матрицам (Паули) и им соответствуют уравнения (Дирака) в изовекторном представлении. Волновая функция мультиплета частиц представляет при этом совокупность двух семикомпонентных 8-изовекторов 1-го ранга ψ^α и φ^β [2], а операторный 8-изовектор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$p^{\alpha\beta}=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} p^0 & ip^5 & -ip^7 & ip^6 & -ip^2 & -ip^4 & ip^3 \\ -ip^5 & p^0 & ip^6 & ip^7 & ip^1 & -ip^3 & -ip^4 \\ ip^7 & -ip^6 & p^0 & ip^5 & -ip^4 & ip^2 & -ip^1 \\ \hline -ip^6 & -ip^7 & -ip^5 & p^0 & ip^3 & ip^1 & ip^2 \\ ip^2 & -ip^1 & ip^4 & -ip^3 & p^0 & -ip^7 & ip^6 \\ ip^4 & ip^3 & -ip^2 & -ip^1 & ip^7 & p^0 & -ip^5 \\ -ip^3 & ip^4 & ip^1 & -ip^2 & -ip^6 & ip^5 & p^0 \end{array}\right\|$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-изовекторы ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам

$$\left.\begin{array}{l} \psi^1 p^{1\beta} + \ldots + \psi^7 p^{7\beta} = m\varphi^{\beta} \\ \varphi^1 p^{\alpha 1} + \ldots + \varphi^7 p^{\alpha 7} = m\psi^{\alpha} \end{array}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{array}{l}
\psi^1p^0 + i\,\psi^6p^4 - i\,\psi^4p^6 + i\,\psi^3p^7 - i\,\psi^7p^3 + i\,\psi^5p^2 - i\,\psi^2p^5 = m\varphi^1 \\
\psi^2p^0 + i\,\psi^1p^5 - i\,\psi^5p^1 + i\,\psi^6p^3 - i\,\psi^3p^6 + i\,\psi^7p^4 - i\,\psi^4p^7 = m\varphi^2 \\
\psi^3p^0 + i\,\psi^7p^1 - i\,\psi^1p^7 + i\,\psi^5p^4 - i\,\psi^4p^5 + i\,\psi^2p^6 - i\,\psi^6p^2 = m\varphi^3 \\
\psi^4p^0 + i\,\psi^2p^7 - i\,\psi^7p^2 + i\,\psi^1p^6 - i\,\psi^6p^1 + i\,\psi^3p^5 - i\,\psi^5p^3 = m\varphi^4 \\
\psi^5p^0 + i\,\psi^4p^3 - i\,\psi^3p^4 + i\,\psi^2 2^1 - i\,\psi^1p^2 + i\,\psi^6p^7 - i\,\psi^7p^6 = m\varphi^5 \\
\psi^6p^0 + i\,\psi^3p^2 - i\,\psi^2p^3 + i\,\psi^7p^5 - i\,\psi^5p^7 + i\,\psi^4p^1 - i\,\psi^1p^4 = m\varphi^6 \\
\psi^7p^0 + i\,\psi^5p^6 - i\,\psi^6p^5 + i\,\psi^4p^2 - i\,\psi^2p^4 + i\,\psi^1p^3 - i\,\psi^3p^1 = m\varphi^7 \\
\\
\varphi^1p^0 - i\,\varphi^6p^4 + i\,\varphi^4p^6 - i\,\varphi^3p^7 + i\,\varphi^7p^3 - i\,\varphi^5p^2 + i\,\varphi^2p^5 = m\psi^1 \\
\varphi^2p^0 - i\,\varphi^1p^5 + i\,\varphi^5p^1 - i\,\varphi^6p^3 + i\,\varphi^3p^6 - i\,\varphi^7p^4 + i\,\varphi^4p^7 = m\psi^2 \\
\varphi^3p^0 - i\,\varphi^7p^1 + i\,\varphi^1p^7 - i\,\varphi^5p^4 + i\,\varphi^4p^5 - i\,\varphi^2p^6 + i\,\varphi^6p^2 = m\psi^3 \\
\varphi^4p^0 - i\,\varphi^2p^7 + i\,\varphi^7p^2 - i\,\varphi^1p^6 + i\,\varphi^6p^1 - i\,\varphi^3p^5 + i\,\varphi^5p^3 = m\psi^4 \\
\varphi^5p^0 - i\,\varphi^4p^3 + i\,\varphi^3p^4 - i\,\varphi^2 2^1 + i\,\varphi^1p^2 - i\,\varphi^6p^7 + i\,\varphi^7p^6 = m\psi^5 \\
\varphi^6p^0 - i\,\varphi^3p^2 + i\,\varphi^2p^3 - i\,\varphi^7p^5 + i\,\varphi^5p^7 - i\,\varphi^4p^1 + i\,\varphi^1p^4 = m\psi^6 \\
\varphi^7p^0 - i\,\varphi^5p^6 + i\,\varphi^6p^5 - i\,\varphi^4p^2 + i\,\varphi^2p^4 - i\,\varphi^1p^3 + i\,\varphi^3p^1 = m\psi^7
\end{array}\right\}$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака) с помощью найденных выше матриц (Паули)

$$\left.\begin{array}{l} (p^0 - pL)\psi = m\varphi \\ (p^0 + pL)\varphi = m\psi \end{array}\right\}$$

Им соответствует представление 14-типлета частиц со спином J=1 в виде

$$\left\{\begin{array}{l} \psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4, \psi^5, \psi^6, \psi^7 \\ \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7 \end{array}\right\}$$

Волновая функция мультиплета частиц в спинорном представлении определяется совокупностью двух шестикомпонентных 8-спиноров 1-го ранга ψ^{α} и φ^{β}, а операторный 8-спинор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$p^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{cc|cccc}
-p^1+ip^3 & 0 & p^0+p^7 & -p^5+ip^6 & -p^4+ip^2 & 0 \\
0 & p^4+ip^2 & p^5+ip^6 & -p^0+p^7 & 0 & p^1+ip^3 \\
\hline
-p^0+p^7 & p^5+ip^6 & p^1+ip^3 & 0 & 0 & p^4+ip^2 \\
-p^5+ip^6 & p^0+p^7 & 0 & -p^4+ip^2 & -p^1+ip^3 & 0 \\
-p^4+ip^2 & 0 & 0 & -p^1+ip^3 & -p^5+ip^6 & p^0+p^7 \\
0 & p^1+ip^3 & p^4+ip^2 & 0 & -p^0+p^7 & p^5+ip^6
\end{array} \right\|$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-спиноры ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$\left.\begin{array}{l} (p^{5\beta}\psi^6 + p^{4\beta}\psi^2 + p^{1\beta}\psi^3) - (p^{6\beta}\psi^5 + p^{2\beta}\psi^4 + p^{3\beta}\psi^1) = m\varphi^{\beta} \\ (p^{\alpha 6}\varphi^5 + p^{\alpha 2}\varphi^4 + p^{\alpha 3}\varphi^1) - (p^{\alpha 5}\varphi^6 + p^{\alpha 4}\varphi^2 + p^{\alpha 1}\varphi^3) = m\psi^{\alpha} \end{array}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{array}{l}
\psi^1p^0 + i\,\psi^6p^2 - \psi^3p^1 - \psi^2p^5 + i\,\psi^2p^6 + i\,\psi^3p^3 - \psi^6p^4 - \psi^1p^7 = m\varphi^1 \\
\psi^2p^0 - i\,\psi^4p^2 - \psi^5p^1 - \psi^1p^5 - i\,\psi^1p^6 - i\,\psi^5p^3 - \psi^4p^4 + \psi^2p^7 = m\varphi^2 \\
\psi^3p^0 - i\,\psi^5p^2 - \psi^1p^1 - \psi^4p^5 - i\,\psi^4p^6 - i\,\psi^1p^3 - \psi^5p^4 + \psi^3p^7 = m\varphi^3 \\
\psi^4p^0 + i\,\psi^2p^2 - \psi^6p^1 - \psi^3p^5 + i\,\psi^3p^6 + i\,\psi^6p^3 - \psi^2p^4 - \psi^4p^7 = m\varphi^4 \\
\psi^5p^0 + i\,\psi^3p^2 - \psi^2p^1 - \psi^6p^5 + i\,\psi^6p^6 + i\,\psi^2p^3 - \psi^3p^4 - \psi^5p^7 = m\varphi^5 \\
\psi^6p^0 - i\,\psi^1p^2 - \psi^4p^1 - \psi^5p^5 - i\,\psi^5p^6 - i\,\psi^4p^3 - \psi^1p^4 + \psi^6p^7 = m\varphi^6 \\
\\
\varphi^1p^0 - i\,\varphi^6p^2 + \varphi^3p^1 + \varphi^2p^5 - i\,\varphi^2p^6 - i\,\varphi^3p^3 + \varphi^6p^4 + \varphi^1p^7 = m\psi^1 \\
\varphi^2p^0 + i\,\varphi^4p^2 + \varphi^5p^1 + \varphi^1p^5 + i\,\varphi^1p^6 + i\,\varphi^5p^3 + \varphi^4p^4 - \varphi^2p^7 = m\psi^2 \\
\varphi^3p^0 + i\,\varphi^5p^2 + \varphi^1p^1 + \varphi^4p^5 + i\,\varphi^4p^6 + i\,\varphi^1p^3 + \varphi^5p^4 - \varphi^3p^7 = m\psi^3 \\
\varphi^4p^0 - i\,\varphi^2p^2 + \varphi^6p^1 + \varphi^3p^5 - i\,\varphi^3p^6 - i\,\varphi^6p^3 + \varphi^2p^4 + \varphi^4p^7 = m\psi^4 \\
\varphi^5p^0 - i\,\varphi^3p^2 + \varphi^2p^1 + \varphi^6p^5 - i\,\varphi^6p^6 - i\,\varphi^2p^3 + \varphi^3p^4 + \varphi^5p^7 = m\psi^5 \\
\varphi^6p^0 + i\,\varphi^1p^2 + \varphi^4p^1 + \varphi^5p^5 + i\,\varphi^5p^6 + i\,\varphi^4p^3 + \varphi^1p^4 - \varphi^6p^7 = m\psi^6
\end{array}\right\}$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака)

$$\left.\begin{array}{l}(p^0 - p\sigma)\psi = m\varphi \\ (p^0 + p\sigma)\varphi = m\psi\end{array}\right\}$$

с помощью матриц (Паули) вида

$$\sigma_5 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\| \qquad \sigma_6 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{array} \right\|$$

$$\sigma_4 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad \sigma_2 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$\sigma_1 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \qquad \sigma_3 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ \hline i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$\sigma_7 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\|$$

Следующие семь унитарных матриц преобразований описывают вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$U_{1(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} Cos\varphi/2 & 0 & iSin\varphi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\varphi/2 & 0 & 0 & iSin\varphi/2 & 0 \\ \hline iSin\varphi/2 & 0 & Cos\varphi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cos\varphi/2 & 0 & iSin\varphi/2 \\ 0 & iSin\varphi/2 & 0 & 0 & Cos\varphi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & iSin\varphi/2 & 0 & Cos\varphi/2 \end{array} \right\|$$

$$U_{2(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} Cos\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & Sin\varphi/2 \\ 0 & Cos\varphi/2 & 0 & -Sin\varphi/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Cos\varphi/2 & 0 & -Sin\varphi/2 & 0 \\ 0 & Sin\varphi/2 & 0 & Cos\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sin\varphi/2 & 0 & Cos\varphi/2 & 0 \\ -Sin\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & Cos\varphi/2 \end{array} \right\|$$

$$U_{3(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} Cos\varphi/2 & 0 & Sin\varphi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cos\varphi/2 & 0 & 0 & -Sin\varphi/2 & 0 \\ \hline -Sin\varphi/2 & 0 & Cos\varphi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cos\varphi/2 & 0 & Sin\varphi/2 \\ 0 & Sin\varphi/2 & 0 & 0 & Cos\varphi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Sin\varphi/2 & 0 & Cos\varphi/2 \end{array} \right\|$$

$$U_{4(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array} \right\|$$

$$U_{5(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array} \right\|$$

$$U_{6(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array} \right\|$$

$$U_{7(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} e^{i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi/2} \end{array} \right\|$$

Запись уравнений (Дирака) в спинорном представлении можно осуществить в виде:

$$\left.\begin{array}{l} (p^0 - p^7)\ \psi^{541} - (p^{541} - ip^{623})\ \psi^{623} = m\varphi^{541} \\ (p^0 + p^7)\ \psi^{623} - (p^{541} + ip^{623})\ \psi^{541} = m\varphi^{623} \\ \\ (p^0 + p^7)\ \varphi^{541} + (p^{541} - ip^{623})\ \varphi^{623} = m\psi^{541} \\ (p^0 - p^7)\ \varphi^{623} + (p^{541} + ip^{623})\ \varphi^{541} = m\psi^{623} \end{array}\right\}$$

чему соответствует представление 12-типлета частиц со спином J=1/2 в форме (Глэшоу)

$$\left\{\begin{matrix} \psi^5 & \psi^6 \\ \varphi^5 & \varphi^6 \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} \psi^4 & \psi^2 \\ \varphi^4 & \varphi^2 \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} \psi^1 & \psi^3 \\ \varphi^1 & \varphi^3 \end{matrix}\right\}$$

Здесь символом ψ^{ijk} обозначена сумма вида $\psi^{ijk} = \psi^i + \psi^j + \psi^k$

2. Векторная алгебра с векторным произведением двух векторов вида:

$[AB]=[(A_1e_1+A_2e_2+\ldots+A_7e_7)(B_1e_1+B_2e_2+\ldots+B_7e_7)]=½(A_{245.6}B_3-A_{364.7}B_2+A_{476.3}B_5-A_{537.2}B_4+A_{723.5}B_6-A_{652.4}B_7)e_1+$
$+(A_{457.1}B_6-A_{615.3}B_4+A_{531.6}B_7-A_{763.4}B_5+A_{346.7}B_1-A_{174.5}B_3)e_2+(A_{612.7}B_5-A_{571.4}B_6+A_{147.5}B_2-A_{254.6}B_1+A_{465.2}B_7-A_{726.1}B_4)e_3+$
$+(A_{573.2}B_1-A_{127.6}B_5+A_{762.1}B_3-A_{316.5}B_7+A_{651.3}B_2-A_{235.7}B_6)e_4+(A_{736.4}B_2-A_{243.1}B_7+A_{314.2}B_6-A_{621.7}B_3+A_{172.6}B_4-A_{467.3}B_1)e_5+$
$+(A_{124.3}B_7-A_{732.5}B_1+A_{253.7}B_4-A_{475.1}B_2+A_{517.4}B_3-A_{341.2}B_5)e_6+(A_{361.5}B_4-A_{456.2}B_3+A_{625.4}B_1-A_{142.3}B_6+A_{234.1}B_5-A_{513.6}B_2)e_7$

Здесь символом $A_{ijk.l}$ обозначена сумма вида $A_{ijk.l} = A_i + A_j + A_k - A_l$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$[AB] = ½(|123| + |246| + |365| + |451| + |572| + |617| + |734| + |735| + |367| + |452| + |613|$
$+ |126| + |574| + |241| + |276| + |431| + |647| + |562| + |714| + |153| + |325| + |651| + |172|$
$+ |723| + |234| + |465| + |346| + |517|)$

В результате векторное произведение двух векторов, а также смешанное (A[BC]) и двойное векторное [A[BC]] произведения векторов (а вслед за этим их иные комбинации) сохраняют свойства семимерной векторной алгебры. Изменяется лишь координатное значение величин. Так, для рассматриваемой алгебры

[ABC] =½(|576(132.4)|+|731(264.5)|+|247(356.1)|+|362(415.7)|+|614(527.3)|+|453(671.2)|+|125(743.6)|)

При этом, как обычно, [A[BC]] = (CA)B-(AB)C+[ABC]

Следующие семь ортогональных матриц преобразования описывают правые вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$A_{1(\varphi)} = ½ \left\| \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{2(\varphi)}=½\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{3(\varphi)}=½\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{4(\varphi)}=½\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{5(\varphi)}=½\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ \hline \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{6(\varphi)}=½\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ \hline 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{7(\varphi)}=½\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \hline \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right\|$$

При этом $A_{i(\varphi)}^{-1} = A_i(\varphi)'$ $(i=1,2,...,7)$

Вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси с направляющими косинусами C_1, …., C_7 определяется антисимметричной матрицей

$$dA=(\partial a_{ik}/\partial\delta\,|_{\,\delta=0})d\delta=½\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -C_{364.7} & C_{245.6} & -C_{537.2} & C_{476.3} & C_{723.5} & -C_{652.4} \\ C_{346.7} & 0 & -C_{174.5} & -C_{615.3} & -C_{763.4} & C_{457.1} & C_{531.6} \\ -C_{254.6} & C_{147.5} & 0 & -C_{726.1} & C_{612.7} & -C_{571.4} & C_{465.2} \\ \hline C_{573.2} & C_{651.3} & C_{762.1} & 0 & -C_{127.6} & -C_{235.7} & -C_{316.5} \\ -C_{467.3} & C_{736.4} & -C_{621.7} & C_{172.6} & 0 & C_{314.2} & -C_{243.1} \\ -C_{732.5} & -C_{475.1} & C_{517.4} & C_{253.7} & -C_{341.2} & 0 & C_{124.3} \\ C_{625.4} & -C_{513.6} & -C_{456.2} & C_{361.5} & C_{234.1} & -C_{142.3} & 0 \end{array}\right\| d\delta$$

При этом $dx'=(dA)x=[cx\,]\,d\delta$, где $\mathbf{c}= C_1\mathbf{e}_1+\ldots+ C_7\mathbf{e}_7$ - единичный вектор в направлении положительной оси вращения, а **[cx]** - векторное произведение векторов **c** и **x**.

Матрицы бесконечно малых вращений вокруг осей (генераторы группы) $L_j=i(\partial/\partial\varphi_j)A_{j(\varphi)}\big|_{\varphi=0}$ имеют вид

$$L_3=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -i & 0 & -i & -i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & i & -i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline i & -i & 0 & 0 & 0 & -i & -i \\ i & i & 0 & 0 & 0 & i & -i \\ -i & 0 & 0 & i & -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 & i & i & i & 0 \end{array}\right\| \qquad L_4=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -i & i & 0 & i & 0 & i \\ i & 0 & -i & 0 & i & i & 0 \\ -i & i & 0 & 0 & 0 & i & i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & -i & 0 & 0 & 0 & i & -i \\ 0 & -i & -i & 0 & -i & 0 & i \\ -i & 0 & -i & 0 & i & -i & 0 \end{array}\right\|$$

$$L_6=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -i & -i & 0 & i & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i & -i & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i & i & 0 & i \\ \hline 0 & i & i & 0 & i & 0 & -i \\ -i & i & -i & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & i & -i & i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \qquad L_1=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -i & 0 & -i & i \\ 0 & i & 0 & i & i & -i & 0 \\ \hline 0 & i & -i & 0 & -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & i & 0 & i & i \\ 0 & i & i & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 & i & -i & -i & 0 \end{array}\right\|$$

$$L_2=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & i & i & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & -i & i & 0 & -i \\ \hline -i & 0 & i & 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & 0 & -i & -i \\ -i & 0 & 0 & i & i & 0 & i \\ i & 0 & i & 0 & i & -i & 0 \end{array}\right\| \qquad L_5=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & i & -i & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & i & -i & 0 & i & i \\ -i & -i & 0 & 0 & 0 & -i & i \\ \hline i & i & 0 & 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & i & i & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & -i & -i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$L_7=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & i & 0 & -i & i & i & 0 \\ -i & 0 & -i & 0 & -i & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i & -i & -i & 0 \\ \hline i & 0 & i & 0 & -i & i & 0 \\ -i & i & i & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & -i & i & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы удовлетворяют (перестановочным) соотношениям

$L_{245.6}L_3-L_{364.7}L_2+L_{476.3}L_5-L_{537.2}L_4+L_{723.5}L_6-L_{652.4}L_7= -3iL_1$; $L_{457.1}L_6-L_{615.3}L_4+L_{531.6}L_7-L_{763.4}L_5+L_{346.7}L_1-L_{174.5}L_3= -3iL_2$
$L_{612.7}L_5-L_{571.4}L_6+L_{147.5}L_2-L_{254.6}L_1+L_{465.2}L_7-L_{726.1}L_4= -3iL_3$; $L_{573.2}L_1-L_{127.6}L_5+L_{762.1}L_3-L_{316.5}L_7+L_{651.3}L_2-L_{235.7}L_6= -3iL_4$
$L_{736.4}L_2-L_{243.1}L_7+L_{314.2}L_6-L_{621.7}L_3+L_{172.6}L_4-L_{467.3}L_1= -3iL_5$; $L_{124.3}L_7-L_{732.5}L_1+L_{253.7}L_4-L_{475.1}L_2+L_{517.4}L_3-L_{341.2}L_5= -3iL_6$
$L_{361.5}L_4-L_{456.2}L_3+L_{625.4}L_1-L_{142.3}L_6+L_{234.1}L_5-L_{513.6}L_2= -3iL_7$

При этом симметричная матрица $\mathbf{L}^2= \sum L_i^2 = 6I$ коммутирует со всеми генераторами L_i, так что $\mathbf{L}^2$ представляет собой оператор Казимира. Он не нарушает сохранение изоспина и отвечает сохраняющейся физической величине.

Матрицы L_i аналогичны матрицам (Паули) и им соответствуют уравнения (Дирака) в изовекторном представлении. Волновая функция мультиплета частиц представляет при этом совокупность двух семикомпонентных 8-изовекторов 1-го ранга ψ^α и φ^β [2], а операторный 8-изовектор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$p^{\alpha\beta}= \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2p^0 & -ip^{364.7} & ip^{245.6} & -ip^{537.2} & ip^{467.3} & ip^{723.5} & -ip^{652.4} \\ ip^{346.7} & 2p^0 & -ip^{174.5} & -ip^{615.3} & -ip^{763.4} & ip^{457.1} & ip^{531.6} \\ -ip^{254.6} & ip^{147.5} & 2p^0 & -ip^{726.1} & ip^{612.7} & -ip^{571.4} & ip^{465.2} \\ \hline ip^{573.2} & ip^{651.3} & ip^{762.1} & 2p^0 & -ip^{127.6} & -ip^{235.7} & -ip^{316.5} \\ -ip^{467.3} & ip^{736.4} & -ip^{621.7} & ip^{172.6} & 2p^0 & ip^{314.2} & -ip^{243.1} \\ -ip^{732.5} & -ip^{475.1} & ip^{517.4} & ip^{253.7} & -ip^{341.2} & 2p^0 & ip^{124.3} \\ ip^{625.4} & -ip^{513.6} & -ip^{456.2} & ip^{361.5} & ip^{234.1} & -ip^{142.3} & 2p^0 \end{array}\right\|$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-изовекторы ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам

$$\left.\begin{array}{l} \psi^1 p^{1\beta} +\ldots+ \psi^7 p^{7\beta}= m\varphi^{\beta} \\ \varphi^1 p^{\alpha 1} +\ldots+ \varphi^7 p^{\alpha 7}= m\psi^{\alpha} \end{array}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{array}{l}
½(2\psi^1p^0 + i\, \psi^{245.6}p^3 - i\, \psi^{364.7}p^2+ i\, \psi^{476.3}p^5 - i\, \psi^{537.2}p^4+ i\, \psi^{723.5}p^6 - i\, \psi^{652.4}p^7) = m\varphi^1 \\
½(2\psi^2p^0 + i\, \psi^{457.1}p^6 - i\, \psi^{615.3}p^4+ i\, \psi^{531.6}p^7 - i\, \psi^{763.4}p^5+ i\, \psi^{346.7}p^1 - i\, \psi^{174.5}p^3) = m\varphi^2 \\
½(2\psi^3p^0 + i\, \psi^{612.7}p^5 - i\, \psi^{571.4}p^6+ i\, \psi^{147.5}p^2 - i\, \psi^{254.6}p^1+ i\, \psi^{465.2}p^7 - i\, \psi^{726.1}p^4) = m\varphi^3 \\
½(2\psi^4p^0 + i\, \psi^{573.2}p^1 - i\, \psi^{127.6}p^5+ i\, \psi^{762.1}p^3 - i\, \psi^{316.5}p^7+ i\, \psi^{651.3}p^2 - i\, \psi^{235.7}p^6) = m\varphi^4 \\
½(2\psi^5p^0 + i\, \psi^{736.4}p^2 - i\, \psi^{243.1}p^7+ i\, \psi^{314.2}p^6 - i\, \psi^{621.7}p^3+ i\, \psi^{172.6}p^4 - i\, \psi^{467.3}p^1) = m\varphi^5 \\
½(2\psi^6p^0 + i\, \psi^{124.3}p^7 - i\, \psi^{732.5}p^1+ i\, \psi^{253.7}p^4 - i\, \psi^{475.1}p^2+ i\, \psi^{517.4}p^3 - i\, \psi^{341.2}p^5) = m\varphi^6 \\
½(2\psi^7p^0 + i\, \psi^{361.5}p^4 - i\, \psi^{456.2}p^3+ i\, \psi^{625.4}p^1 - i\, \psi^{142.3}p^6+ i\, \psi^{234.1}p^5 - i\, \psi^{513.6}p^2) = m\varphi^7 \\
½(2\varphi^1p^0 - i\, \varphi^{245.6}p^3 + i\, \varphi^{364.7}p^2 - i\, \varphi^{476.3}p^5 + i\, \varphi^{537.2}p^4 - i\, \varphi^{723.5}p^6 + i\, \varphi^{652.4}p^7) = m\psi^1 \\
½(2\varphi^2p^0 - i\, \varphi^{457.1}p^6 + i\, \varphi^{615.3}p^4 - i\, \varphi^{531.6}p^7 + i\, \varphi^{763.4}p^5 - i\, \varphi^{346.7}p^1 + i\, \varphi^{174.5}p^3) = m\psi^2 \\
½(2\varphi^3p^0 - i\, \varphi^{612.7}p^5 + i\, \varphi^{571.4}p^6 - i\, \varphi^{147.5}p^2 + i\, \varphi^{254.6}p^1 - i\, \varphi^{465.2}p^7 + i\, \varphi^{726.1}p^4) = m\psi^3 \\
½(2\varphi^4p^0 - i\, \varphi^{573.2}p^1 + i\, \varphi^{127.6}p^5 - i\, \varphi^{762.1}p^3 + i\, \varphi^{316.5}p^7 - i\, \varphi^{651.3}p^2 + i\, \varphi^{235.7}p^6) = m\psi^4 \\
½(2\varphi^5p^0 - i\, \varphi^{736.4}p^2 + i\, \varphi^{243.1}p^7 - i\, \varphi^{314.2}p^6 + i\, \varphi^{621.7}p^3 - i\, \varphi^{172.6}p^4 + i\, \varphi^{467.3}p^1) = m\psi^5 \\
½(2\varphi^6p^0 - i\, \varphi^{124.3}p^7 + i\, \varphi^{732.5}p^1 - i\, \varphi^{253.7}p^4 + i\, \varphi^{475.1}p^2 - i\, \varphi^{517.4}p^3 + i\, \varphi^{341.2}p^5) = m\psi^6 \\
½(2\varphi^7p^0 - i\, \varphi^{361.5}p^4 + i\, \varphi^{456.2}p^3 - i\, \varphi^{625.4}p^1 + i\, \varphi^{142.3}p^6 - i\, \varphi^{234.1}p^5 + i\, \varphi^{513.6}p^2) = m\psi^7
\end{array}\right\}$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака) с помощью найденных выше матриц (Паули)

$$\left.\begin{array}{l} (p^0 - pL)\psi= m\varphi \\ (p^0 + pL)\varphi= m\psi \end{array}\right\}$$

Им соответствует представление 14-типлета частиц со спином J=1 в виде

$$\left\{\begin{array}{l} \psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4, \psi^5, \psi^6, \psi^7 \\ \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7 \end{array}\right\}$$

Волновая функция мультиплета частиц в спинорном представлении определяется совокупностью двух шестикомпонентных 8-спиноров 1-го ранга ψ^{α} и φ^{β}, а операторный 8-спинор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$p^{\alpha\beta}=½\left\|\begin{array}{ll|llll}
p^{6.2}+ip^{15} & p^{362}-ip^{415} & p^{362}+ip^{415} & p^{2.3}+ip^{54} & p^{3.6}+ip^{41} & 2(-p^0+p^7) \\
p^{362}-ip^{415} & -p^{2.3}+ip^{54} & -p^{6.2}+ip^{15} & p^{362}+ip^{415} & 2(p^0+p^7) & -p^{3.6}+ip^{41} \\
\hline
p^{362}+ip^{415} & -p^{6.2}+ip^{15} & -p^{3.6}+ip^{41} & 2(p^0+p^7) & p^{362}-ip^{415} & -p^{2.3}+ip^{54} \\
p^{2.3}+ip^{54} & p^{362}+ip^{415} & 2(-p^0+p^7) & p^{3.6}+ip^{41} & p^{6.2}+ip^{15} & p^{362}-ip^{415} \\
p^{3.6}+ip^{41} & 2(-p^0+p^7) & p^{362}-ip^{415} & p^{6.2}+ip^{15} & p^{2.3}+ip^{54} & p^{362}+ip^{415} \\
2(p^0+p^7) & -p^{3.6}+ip^{41} & -p^{2.3}+ip^{54} & p^{362}-ip^{415} & p^{362}+ip^{415} & -p^{6.2}+ip^{15}
\end{array}\right\|$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-спиноры ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$\left.\begin{array}{l} (p^{3\beta}\psi^4 + p^{6\beta}\psi^1 + p^{2\beta}\psi^5) - (p^{4\beta}\psi^3 + p^{1\beta}\psi^6 + p^{5\beta}\psi^2) = m\varphi^{\beta} \\ (p^{\alpha 4}\varphi^3 + p^{\alpha 1}\varphi^6 + p^{\alpha 5}\varphi^2) - (p^{\alpha 3}\varphi^4 + p^{\alpha 6}\varphi^1 + p^{\alpha 2}\varphi^5) = m\psi^{\alpha} \end{array}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{array}{l}
½(2\psi^1p^0 - i\, \psi^{625.4}p^1 + \psi^{456.3}p^2 +\psi^{453.2}p^3 - i\, \psi^{235.4}p^4 - i\, \psi^{365.4}p^5 + \psi^{452.6}p^6 + 2\psi^1p^7) = m\varphi^1 \\
½(2\psi^2p^0 + i\, \psi^{416.3}p^1 - \psi^{365.4}p^2- \psi^{361.5}p^3 + i\, \psi^{156.3}p^4+ i\, \psi^{546.3}p^5 - \psi^{364.1}p^6 - 2\psi^2p^7) = m\varphi^2 \\
½(2\psi^3p^0 + i\, \psi^{542.6}p^1 - \psi^{621.5}p^2- \psi^{624.1}p^3 + i\, \psi^{412.6}p^4+ i\, \psi^{152.6}p^5 - \psi^{625.4}p^6 - 2\psi^3p^7) = m\varphi^3 \\
½(2\psi^4p^0 - i\, \psi^{231.5}p^1 + \psi^{512.6}p^2+ \psi^{516.3}p^3 - i\, \psi^{361.5}p^4- i\, \psi^{621.5}p^5 + \psi^{513.2}p^6 + 2\psi^4p^7) = m\varphi^4 \\
½(2\psi^5p^0 - i\, \psi^{364.1}p^1 + \psi^{143.2}p^2+ \psi^{142.6}p^3 - i\, \psi^{624.1}p^4- i\, \psi^{234.1}p^5 + \psi^{146.3}p^6 + 2\psi^5p^7) = m\varphi^5 \\
½(2\psi^6p^0 + i\, \psi^{153.2}p^1 - \psi^{234.1}p^2- \psi^{235.4}p^3 + i\, \psi^{543.2}p^4+ i\, \psi^{413.2}p^5 - \psi^{231.5}p^6 - 2\psi^6p^7) = m\varphi^6 \\
½(2\varphi^1p^0 + i\, \varphi^{625.4}p^1 - \varphi^{456.3}p^2 - \varphi^{453.2}p^3 + i\, \varphi^{235.4}p^4 + i\, \varphi^{365.4}p^5- \varphi^{452.6}p^6 - 2\varphi^1p^7) = m\psi^1 \\
½(2\varphi^2p^0 - i\, \varphi^{416.3}p^1 + \varphi^{365.4}p^2 + \varphi^{361.5}p^3 - i\, \varphi^{156.3}p^4 - i\, \varphi^{546.3}p^5+ \varphi^{364.1}p^6 + 2\varphi^2p^7) = m\psi^2 \\
½(2\varphi^3p^0 - i\, \varphi^{542.6}p^1 + \varphi^{621.5}p^2 + \varphi^{624.1}p^3 - i\, \varphi^{412.6}p^4 - i\, \varphi^{152.6}p^5+ \varphi^{625.4}p^6 + 2\varphi^3p^7) = m\psi^3 \\
½(2\varphi^4p^0 + i\, \varphi^{231.5}p^1 - \varphi^{512.6}p^2 - \varphi^{516.3}p^3 + i\, \varphi^{361.5}p^4 + i\, \varphi^{621.5}p^5 - \varphi^{513.2}p^6 - 2\varphi^4p^7) = m\psi^4 \\
½(2\varphi^5p^0 + i\, \varphi^{364.1}p^1 - \varphi^{143.2}p^2 - \varphi^{142.6}p^3 + i\, \varphi^{624.1}p^4 + i\, \varphi^{234.1}p^5 - \varphi^{146.3}p^6 - 2\varphi^5p^7) = m\psi^5 \\
½(2\varphi^6p^0 - i\, \varphi^{153.2}p^1 + \varphi^{234.1}p^2 + \varphi^{235.4}p^3 - i\, \varphi^{543.2}p^4 - i\, \varphi^{413.2}p^5+ \varphi^{231.5}p^6 + 2\varphi^6p^7) = m\psi^6
\end{array}\right\}$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака)

$$\left.\begin{array}{l}(p^0 - p\sigma)\psi = m\varphi \\ (p^0 + p\sigma)\varphi = m\psi\end{array}\right\}$$

с помощью матриц (Паули) вида:

$$\sigma_3 = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right\| \qquad \sigma_4 = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & i & i & -i & i & 0 \\ -i & 0 & i & 0 & -i & -i \\ \hline -i & -i & 0 & -i & 0 & i \\ i & 0 & i & 0 & -i & i \\ -i & i & 0 & i & 0 & i \\ 0 & i & -i & -i & -i & 0 \end{array}\right\|$$

$$\sigma_6 = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right\| \qquad \sigma_1 = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & i & 0 & -i & i & i \\ -i & 0 & i & -i & 0 & -i \\ \hline 0 & -i & 0 & -i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & i & i & 0 & i \\ -i & i & -i & 0 & -i & 0 \end{array}\right\|$$

$$\sigma_2 = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\| \qquad \sigma_5 = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & i & -i & i & i \\ 0 & 0 & i & -i & -i & -i \\ \hline -i & -i & 0 & 0 & -i & i \\ i & i & 0 & 0 & -i & i \\ -i & i & i & i & 0 & 0 \\ -i & i & -i & -i & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$\sigma_7 = \left\|\begin{array}{cc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|$$

Следующие семь унитарных матриц преобразований описывают вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$U_{1(\varphi)} = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ll|llll} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|$$

$$U_{2(\varphi)} = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ll|llll} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|$$

$$U_{3(\varphi)} = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ll|llll} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|$$

$$U_{4(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0\\
\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\
\hline
\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2\\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2\\
\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2\\
0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\|$$

$$U_{5(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0\\
\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\
\hline
\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2\\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2\\
\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2\\
0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\|$$

$$U_{6(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\
-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\
\hline
0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\
-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0\\
-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2\\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\|$$

$$U_{7(\varphi)}=\left\|\begin{array}{cc|cccc}
e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & e^{i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi/2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2}
\end{array}\right\|$$

Запись уравнений (Дирака) в спинорном представлении можно осуществить в виде:

$$\left.\begin{array}{l}
(p^0 - p^{7362})\ \psi^{362} + ip^{415}\ \psi^{415} = m\varphi^{362}\\
(p^0 + p^{7362})\ \psi^{415} - ip^{415}\ \psi^{362} = m\varphi^{415}\\
\\
(p^0 + p^{7362})\ \varphi^{362} - ip^{415}\ \varphi^{415} = m\psi^{362}\\
(p^0 - p^{7362})\ \varphi^{415} + ip^{415}\ \varphi^{362} = m\psi^{415}
\end{array}\right\}$$

чему соответствует представление 12-типлета частиц со спином J=1/2 в форме (Глэшоу)

$$\left\{\begin{array}{cc}\psi^3 & \psi^4\\ \varphi^3 & \varphi^4\end{array}\right\}\quad \left\{\begin{array}{cc}\psi^6 & \psi^1\\ \varphi^6 & \varphi^1\end{array}\right\}\qquad \left\{\begin{array}{cc}\psi^2 & \psi^5\\ \varphi^2 & \varphi^5\end{array}\right\}$$

3. Векторная алгебра с векторным произведением двух векторов вида:

$[AB]=[(A_1e_1+A_2e_2+\ldots+A_7e_7)(B_1e_1+B_2e_2+\ldots+B_7e_7)]=\tfrac{1}{2}(A_{637.2}B_4-A_{423.5}B_6+A_{352.4}B_7-A_{745.6}B_3+A_{564.7}B_2-A_{276.3}B_5)e_1+$
$+(A_{163.4}B_5-A_{546.7}B_1+A_{674.5}B_3-A_{357.1}B_6+A_{715.3}B_4-A_{431.6}B_7)e_2+(A_{754.6}B_1-A_{165.2}B_7+A_{526.1}B_4-A_{412.7}B_5+A_{271.4}B_6-A_{647.5}B_2)e_3+$
$+(A_{216.5}B_7-A_{751.3}B_2+A_{135.7}B_6-A_{673.2}B_1+A_{327.6}B_5-A_{562.1}B_3)e_4+(A_{421.7}B_3-A_{372.6}B_4+A_{267.3}B_1-A_{136.4}B_2+A_{643.1}B_7-A_{714.2}B_6)e_5+$
$+(A_{375.1}B_2-A_{217.4}B_3+A_{741.2}B_5-A_{524.3}B_7+A_{432.5}B_1-A_{153.7}B_4)e_6+(A_{542.3}B_6-A_{634.1}B_5+A_{413.6}B_2-A_{261.5}B_4+A_{156.2}B_3-A_{325.4}B_1)e_7$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$[AB] = \tfrac{1}{2}(|164| + |215| + |371| + |427| + |543| + |632| + |756| + |547| + |753| + |214| + |376|$
$+|631| + |425| + |162| + |652| + |174| + |726| + |235| + |467| + |341| + |513| + |271| + |432|$
$+|643| + |564| + |715| + |156| + |327|)$

В результате векторное произведение двух векторов, а также смешанное (A[BC]) и двойное векторное [A[BC]] произведения векторов (а вслед за этим их иные комбинации) сохраняют свойства семимерной векторной алгебры. Изменяется лишь координатное значение величин. Так, для рассматриваемой алгебры

$[ABC] = \tfrac{1}{2}(|374(251.6)|+|635(472.1)|+|541(623.7)|+|167(534.2)|+|213(765.4)|+|752(146.3)|+|426(317.5)|)$

При этом, как обычно, $[A[BC]] = (CA)B-(AB)C+[ABC]$

Следующие семь ортогональных матриц преобразования описывают правые вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$A_{1(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi\\
0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi\\
\hline
0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi\\
0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi\\
0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0\\
0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{2(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ \hline \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{3(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{4(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{5(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \hline 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{6(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi \end{array}\right\|$$

$$A_{7(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right\|$$

При этом $A_{i(\varphi)}^{-1} = A_i(\varphi)'$ $(i=1,2,...,7)$

Вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси с направляющими косинусами C_1, …, C_7 определяется антисимметричной матрицей

$$dA=(\partial a_{ik}/\partial\delta\,\big|_{\delta=0})d\delta=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & C_{564.7} & -C_{745.6} & C_{637.2} & -C_{276.3} & -C_{423.5} & C_{352.4} \\ -C_{546.7} & 0 & C_{674.5} & C_{715.3} & C_{163.4} & -C_{357.1} & -C_{431.6} \\ C_{754.6} & -C_{647.5} & 0 & C_{526.1} & -C_{412.7} & C_{271.4} & -C_{165.2} \\ \hline -C_{673.2} & -C_{751.3} & -C_{562.1} & 0 & C_{327.6} & C_{135.7} & C_{216.5} \\ C_{267.3} & -C_{136.4} & C_{421.7} & -C_{372.6} & 0 & -C_{714.2} & C_{643.1} \\ C_{432.5} & C_{375.1} & -C_{217.4} & -C_{153.7} & C_{741.2} & 0 & -C_{524.3} \\ -C_{325.4} & C_{413.6} & C_{156.2} & -C_{261.5} & -C_{634.1} & C_{542.3} & 0 \end{array}\right\| d\delta$$

При этом $dx'=(dA)x=[cx]\,d\delta$, где $c= C_1e_1+…+ C_7e_7$ - единичный вектор в направлении положительной оси вращения, а $[cx]$ - векторное произведение векторов c и x.

Матрицы бесконечно малых вращений вокруг осей (генераторы группы) $L_j=i(\partial/\partial\varphi j)A_{j(\varphi)}\big|_{\varphi=0}$ имеют вид

$$L_5=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & i & -i & 0 & 0 & i & i \\ -i & 0 & -i & i & 0 & -i & 0 \\ i & i & 0 & i & 0 & 0 & -i \\ \hline 0 & -i & -i & 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & -i & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & i & i & 0 & i & 0 \end{array}\right\| \qquad L_6=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & i & i & i & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & i & 0 & i & 0 & i \\ -i & -i & 0 & i & 0 & 0 & -i \\ \hline -i & 0 & -i & 0 & -i & 0 & i \\ i & -i & 0 & i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i & -i & -i & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$L_4=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & i & -i & 0 & 0 & -i & -i \\ -i & 0 & i & 0 & -i & 0 & -i \\ i & -i & 0 & 0 & -i & -i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & i & 0 & 0 & -i & i \\ i & 0 & i & 0 & i & 0 & -i \\ i & i & 0 & 0 & -i & i & 0 \end{array}\right\| \qquad L_2=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -i & -i & -i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & -i & i & i \\ \hline i & 0 & -i & 0 & i & 0 & i \\ i & 0 & i & -i & 0 & i & 0 \\ i & 0 & -i & 0 & -i & 0 & -i \\ -i & 0 & -i & -i & 0 & i & 0 \end{array}\right\|$$

$$L_1=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & i & i & -i \\ 0 & 0 & 0 & -i & -i & i & -i \\ \hline 0 & -i & i & 0 & 0 & i & i \\ 0 & -i & i & 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & -i & -i & -i & i & 0 & 0 \\ 0 & i & i & -i & i & 0 & 0 \end{array}\right\| \qquad L_3=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & i & i & -i & i \\ 0 & 0 & 0 & -i & i & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -i & i & 0 & 0 & i & i & 0 \\ -i & -i & 0 & -i & 0 & 0 & i \\ i & i & 0 & -i & 0 & 0 & i \\ -i & i & 0 & 0 & -i & -i & 0 \end{array}\right\|$$

$$L_7=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -i & -i & i & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & i & i & 0 & -i & 0 \\ i & -i & 0 & 0 & i & i & 0 \\ \hline -i & -i & 0 & 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & -i & -i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & -i & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы удовлетворяют (перестановочным) соотношениям:

$L_{637.2}L_4-L_{423.5}L_6+L_{352.4}L_7-L_{745.6}L_3+L_{564.7}L_2-L_{276.3}L_5= -3iL_1$; $L_{163.4}L_5-L_{546.7}L_1+L_{674.5}L_3-L_{357.1}L_6+L_{715.3}L_4-L_{431.6}L_7= -3iL_2$

$L_{754.6}L_1-L_{165.2}L_7+L_{526.1}L_4-L_{412.7}L_5+L_{271.4}L_6-L_{647.5}L_2= -3iL_3$; $L_{216.5}L_7-L_{751.3}L_2+L_{135.7}L_6-L_{673.2}L_1+L_{327.6}L_5-L_{562.1}L_3= -3iL_4$

$L_{421.7}L_3-L_{372.6}L_4+L_{267.3}L_1-L_{136.4}L_2+L_{643.1}L_7-L_{714.2}L_6= -3iL_5$; $L_{375.1}L_2-L_{217.4}L_3+L_{741.2}L_5-L_{524.3}L_7+L_{432.5}L_1-L_{153.7}L_4= -3iL_6$

$L_{542.3}L_6-L_{634.1}L_5+L_{413.6}L_2-L_{261.5}L_4+L_{156.2}L_3-L_{325.4}L_1= -3iL_7$

При этом симметричная матрица $L^2= \sum L_i^2 = 6I$ коммутирует со всеми генераторами L_i, так что L^2 представляет собой оператор Казимира. Он не нарушает сохранение изоспина и отвечает сохраняющейся физической величине.

Матрицы L_i аналогичны матрицам (Паули) и им соответствуют уравнения (Дирака) в изовекторном представлении. Волновая функция мультиплета частиц представляет при этом совокупность двух семикомпонентных 8-изовекторов 1-го ранга ψ^α и φ^β [2], а операторный 8-изовектор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$p^{\alpha\beta\cdot}= \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 2p^0 & ip^{564.7} & -ip^{745.6} & ip^{637.2} & -ip^{276.3} & -ip^{423.5} & ip^{352.4} \\ -ip^{546.7} & 2p^0 & ip^{674.5} & ip^{715.3} & ip^{163.4} & -ip^{357.1} & -ip^{431.6} \\ ip^{754.6} & -ip^{647.5} & 2p^0 & ip^{526.1} & -ip^{412.7} & ip^{271.4} & -ip^{165.2} \\ \hline -ip^{673.2} & -ip^{751.3} & -ip^{562.1} & 2p^0 & ip^{327.6} & ip^{135.7} & ip^{216.5} \\ ip^{267.3} & -ip^{136.4} & ip^{421.7} & -ip^{372.6} & 2p^0 & -ip^{714.2} & ip^{643.1} \\ ip^{432.5} & ip^{375.1} & -ip^{217.4} & -ip^{153.7} & ip^{741.2} & 2p^0 & -ip^{524.3} \\ -ip^{325.4} & ip^{413.6} & ip^{156.2} & -ip^{261.5} & -ip^{634.1} & ip^{542.3} & 2p^0 \end{array}\right\|$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-изовекторы ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi^1 p^{1\beta} + \ldots + \psi^7 p^{7\beta} = m\varphi^{\beta}\\
&\varphi^1 p^{\alpha 1} + \ldots + \varphi^7 p^{\alpha 7} = m\psi^{\alpha}
\end{aligned}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(2\psi^1p^0 + i\,\psi^{637.2}p^4 - i\,\psi^{423.5}p^6 + i\,\psi^{352.4}p^7 - i\,\psi^{745.6}p^3 + i\,\psi^{564.7}p^2 - i\,\psi^{276.3}p^5) = m\varphi^1\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^2p^0 + i\,\psi^{163.4}p^5 - i\,\psi^{546.7}p^1 + i\,\psi^{674.5}p^3 - i\,\psi^{357.1}p^6 + i\,\psi^{715.3}p^4 - i\,\psi^{431.6}p^7) = m\varphi^2\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^3p^0 + i\,\psi^{754.6}p^1 - i\,\psi^{165.2}p^7 + i\,\psi^{526.1}p^4 - i\,\psi^{412.7}p^5 + i\,\psi^{271.4}p^6 - i\,\psi^{647.5}p^2) = m\varphi^3\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^4p^0 + i\,\psi^{216.5}p^7 - i\,\psi^{751.3}p^2 + i\,\psi^{135.7}p^6 - i\,\psi^{673.2}p^1 + i\,\psi^{327.6}p^5 - i\,\psi^{562.1}p^3) = m\varphi^4\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^5p^0 + i\,\psi^{421.7}p^3 - i\,\psi^{372.6}p^4 + i\,\psi^{267.3}p^1 - i\,\psi^{136.4}p^2 + i\,\psi^{643.1}p^7 - i\,\psi^{714.2}p^6) = m\varphi^5\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^6p^0 + i\,\psi^{375.1}p^2 - i\,\psi^{217.4}p^3 + i\,\psi^{741.2}p^5 - i\,\psi^{524.3}p^7 + i\,\psi^{432.5}p^1 - i\,\psi^{153.7}p^4) = m\varphi^6\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^7p^0 + i\,\psi^{542.3}p^6 - i\,\psi^{634.1}p^5 + i\,\psi^{413.6}p^2 - i\,\psi^{261.5}p^4 + i\,\psi^{156.2}p^3 - i\,\psi^{325.4}p^1) = m\varphi^7\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^1p^0 - i\,\varphi^{637.2}p^4 + i\,\varphi^{423.5}p^6 - i\,\varphi^{352.4}p^7 + i\,\varphi^{745.6}p^3 - i\,\varphi^{564.7}p^2 + i\,\varphi^{276.3}p^5) = m\psi^1\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^2p^0 - i\,\varphi^{163.4}p^5 + i\,\varphi^{546.7}p^1 - i\,\varphi^{674.5}p^3 + i\,\varphi^{357.1}p^6 - i\,\varphi^{715.3}p^4 + i\,\varphi^{431.6}p^7) = m\psi^2\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^3p^0 - i\,\varphi^{754.6}p^1 + i\,\varphi^{165.2}p^7 - i\,\varphi^{526.1}p^4 + i\,\varphi^{412.7}p^5 - i\,\varphi^{271.4}p^6 + i\,\varphi^{647.5}p^2) = m\psi^3\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^4p^0 - i\,\varphi^{216.5}p^7 + i\,\varphi^{751.3}p^2 - i\,\varphi^{135.7}p^6 + i\,\varphi^{673.2}p^1 - i\,\varphi^{327.6}p^5 + i\,\varphi^{562.1}p^3) = m\psi^4\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^5p^0 - i\,\varphi^{421.7}p^3 + i\,\varphi^{372.6}p^4 - i\,\varphi^{267.3}p^1 + i\,\varphi^{136.4}p^2 - i\,\varphi^{643.1}p^7 + i\,\varphi^{714.2}p^6) = m\psi^5\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^6p^0 - i\,\varphi^{375.1}p^2 + i\,\varphi^{217.4}p^3 - i\,\varphi^{741.2}p^5 + i\,\varphi^{524.3}p^7 - i\,\varphi^{432.5}p^1 + i\,\varphi^{153.7}p^4) = m\psi^6\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^7p^0 - i\,\varphi^{542.3}p^6 + i\,\varphi^{634.1}p^5 - i\,\varphi^{413.6}p^2 + i\,\varphi^{261.5}p^4 - i\,\varphi^{156.2}p^3 + i\,\varphi^{325.4}p^1) = m\psi^7
\end{aligned}\right\}$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака) с помощью найденных выше матриц (Паули)

$$\left.\begin{aligned}
&(p^0 - pL)\psi = m\varphi\\
&(p^0 + pL)\varphi = m\psi
\end{aligned}\right\}$$

Им соответствует представление 14-типлета частиц со спином J=1 в виде

$$\left\{\begin{aligned}
&\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4, \psi^5, \psi^6, \psi^7\\
&\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7
\end{aligned}\right\}$$

Волновая функция мультиплета частиц в спинорном представлении определяется совокупностью двух шестикомпонентных 8-спиноров 1-го ранга ψ^{α} и φ^{β}, а операторный 8-спинор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$p^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
-p^{1.5}+ip^{36} & p^{541}-ip^{623} & 2(p^0+p^7) & -p^{5.4}+ip^{62} & -p^{4.1}+ip^{23} & p^{541}+ip^{623}\\
p^{541}-ip^{623} & p^{4.1}+ip^{23} & p^{5.4}+ip^{62} & 2(-p^0+p^7) & p^{541}+ip^{623} & p^{1.5}+ip^{36}\\
\hline
2(-p^0+p^7) & p^{5.4}+ip^{62} & p^{1.5}+ip^{36} & p^{541}+ip^{623} & p^{541}-ip^{623} & p^{4.1}+ip^{23}\\
-p^{5.4}+ip^{62} & 2(p^0+p^7) & p^{541}+ip^{623} & -p^{4.1}+ip^{23} & -p^{1.5}+ip^{36} & p^{541}-ip^{623}\\
-p^{4.1}+ip^{23} & p^{541}+ip^{623} & p^{541}-ip^{623} & -p^{1.5}+ip^{36} & -p^{5.4}+ip^{62} & 2(p^0+p^7)\\
p^{541}+ip^{623} & p^{1.5}+ip^{36} & p^{4.1}+ip^{23} & p^{541}-ip^{623} & 2(-p^0+p^7) & p^{5.4}+ip^{62}
\end{array}\right\|$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-спиноры ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам

$$\left.\begin{aligned}
&(p^{5\beta}\psi^6 + p^{4\beta}\psi^2 + p^{1\beta}\psi^3) - (p^{6\beta}\psi^5 + p^{2\beta}\psi^4 + p^{3\beta}\psi^1) = m\varphi^{\beta}\\
&(p^{\alpha 6}\varphi^5 + p^{\alpha 2}\varphi^4 + p^{\alpha 3}\varphi^1) - (p^{\alpha 5}\varphi^6 + p^{\alpha 4}\varphi^2 + p^{\alpha 1}\varphi^3) = m\psi^{\alpha}
\end{aligned}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(2\psi^1p^0 + i\,\psi^{624.5}p^2 - \psi^{453.6}p^1 - \psi^{452.3}p^5 + i\,\psi^{234.5}p^6 + i\,\psi^{364.5}p^3 - \psi^{456.2}p^4 - 2\psi^1p^7) = m\varphi^1\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^2p^0 - i\,\psi^{413.6}p^2 + \psi^{364.5}p^1 + \psi^{365.1}p^5 - i\,\psi^{153.6}p^6 - i\,\psi^{543.6}p^3 + \psi^{361.4}p^4 + 2\psi^2p^7) = m\varphi^2\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^3p^0 - i\,\psi^{546.2}p^2 + \psi^{625.1}p^1 + \psi^{621.4}p^5 - i\,\psi^{416.2}p^6 - i\,\psi^{156.2}p^3 + \psi^{624.5}p^4 + 2\psi^3p^7) = m\varphi^3\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^4p^0 + i\,\psi^{235.1}p^2 - \psi^{516.2}p^1 - \psi^{513.6}p^5 + i\,\psi^{365.1}p^6 + i\,\psi^{625.1}p^3 - \psi^{512.3}p^4 - 2\psi^4p^7) = m\varphi^4\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^5p^0 + i\,\psi^{361.4}p^2 - \psi^{142.3}p^1 - \psi^{146.2}p^5 + i\,\psi^{621.4}p^6 + i\,\psi^{231.4}p^3 - \psi^{143.6}p^4 - 2\psi^5p^7) = m\varphi^5\\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^6p^0 - i\,\psi^{152.3}p^2 + \psi^{231.4}p^1 + \psi^{234.5}p^5 - i\,\psi^{542.3}p^6 - i\,\psi^{412.3}p^3 + \psi^{235.1}p^4 + 2\psi^6p^7) = m\varphi^6\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^1p^0 - i\,\varphi^{624.5}p^2 + \varphi^{453.6}p^1 + \varphi^{452.3}p^5 - i\,\varphi^{234.5}p^6 - i\,\varphi^{364.5}p^3 + \varphi^{456.2}p^4 + 2\varphi^1p^7) = m\psi^1\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^2p^0 + i\,\varphi^{413.6}p^2 - \varphi^{364.5}p^1 - \varphi^{365.1}p^5 + i\,\varphi^{153.6}p^6 + i\,\varphi^{543.6}p^3 - \varphi^{361.4}p^4 - 2\varphi^2p^7) = m\psi^2\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^3p^0 + i\,\varphi^{546.2}p^2 - \varphi^{625.1}p^1 - \varphi^{621.4}p^5 + i\,\varphi^{416.2}p^6 + i\,\varphi^{156.2}p^3 - \varphi^{624.5}p^4 - 2\varphi^3p^7) = m\psi^3\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^4p^0 - i\,\varphi^{235.1}p^2 + \varphi^{516.2}p^1 + \varphi^{513.6}p^5 - i\,\varphi^{365.1}p^6 - i\,\varphi^{625.1}p^3 + \varphi^{512.3}p^4 + 2\varphi^4p^7) = m\psi^4\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^5p^0 - i\,\varphi^{361.4}p^2 + \varphi^{142.3}p^1 + \varphi^{146.2}p^5 - i\,\varphi^{621.4}p^6 - i\,\varphi^{231.4}p^3 + \varphi^{143.6}p^4 + 2\varphi^5p^7) = m\psi^5\\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^6p^0 + i\,\varphi^{152.3}p^2 - \varphi^{231.4}p^1 - \varphi^{234.5}p^5 + i\,\varphi^{542.3}p^6 + i\,\varphi^{412.3}p^3 - \varphi^{235.1}p^4 - 2\varphi^6p^7) = m\psi^6
\end{aligned}\right\}$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака)

$$\left.\begin{array}{l}(p^0 - p\sigma)\psi = m\varphi \\ (p^0 + p\sigma)\varphi = m\psi\end{array}\right\}$$

с помощью матриц (Паули) вида:

$$\sigma_5=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right\| \qquad \sigma_6=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & -i & -i & -i & i & 0 \\ i & 0 & i & 0 & i & -i \\ \hline i & -i & 0 & i & 0 & i \\ i & 0 & -i & 0 & -i & -i \\ -i & -i & 0 & i & 0 & -i \\ 0 & i & -i & i & i & 0 \end{array}\right\|$$

$$\sigma_4=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right\| \qquad \sigma_2=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & -i & 0 & -i & i & -i \\ i & 0 & i & i & 0 & -i \\ \hline 0 & -i & 0 & i & i & i \\ i & -i & -i & 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i & i & 0 & -i \\ i & i & -i & 0 & i & 0 \end{array}\right\|$$

$$\sigma_1=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\| \qquad \sigma_3=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & -i & -i & i & -i \\ 0 & 0 & i & i & i & -i \\ \hline i & -i & 0 & 0 & i & i \\ i & -i & 0 & 0 & -i & -i \\ -i & -i & -i & i & 0 & 0 \\ i & i & -i & i & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

$$\sigma_7=\left\|\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right\|$$

Следующие семь унитарных матриц преобразований описывают вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$U_{1(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ll|llll} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|$$

$$U_{2(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ll|llll} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|$$

$$U_{3(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ll|llll} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|$$

$$U_{4(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ll|llll} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|$$

$$U_{5(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0\\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2\\
\hline
-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2\\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2\\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\
0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\|$$

$$U_{6(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0\\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\
\hline
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2\\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\
\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\
0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\|$$

$$U_{7(\varphi)}=\left\|\begin{array}{cc|cccc}
e^{i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi/2}
\end{array}\right\|$$

Запись уравнений (Дирака) в спинорном представлении можно осуществить в виде:

$$\left.\begin{array}{l}
(p^0 - p^{7541})\,\psi^{541} + ip^{623}\,\psi^{623} = m\varphi^{541}\\
(p^0 + p^{7541})\,\psi^{623} - ip^{623}\,\psi^{541} = m\varphi^{623}\\[1ex]
(p^0 + p^{7541})\,\varphi^{541} - ip^{623}\,\varphi^{623} = m\psi^{541}\\
(p^0 - p^{7541})\,\varphi^{623} + ip^{623}\,\varphi^{541} = m\psi^{623}
\end{array}\right\}$$

чему соответствует представление 12-типлета частиц со спином J=1/2 в форме (Глэшоу)

$$\left\{\begin{array}{c}\psi^5\ \psi^6\\ \varphi^5\ \varphi^6\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{c}\psi^4\ \psi^2\\ \varphi^4\ \varphi^2\end{array}\right\}\qquad\left\{\begin{array}{c}\psi^1\ \psi^3\\ \varphi^1\ \varphi^3\end{array}\right\}$$

Приведем также выражение тензоров полей, соответствующих каждой из четырех семимерных векторных алгебр:

- для известной алгебры

$$F^0_{ik}=\left\|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & E^1 & E^2 & E^3 & E^4 & E^5 & E^6 & E^7\\
-E^1 & 0 & -H^3 & H^2 & -H^5 & H^4 & H^7 & -H^6\\
-E^2 & H^3 & 0 & -H^1 & -H^6 & -H^7 & H^4 & H^5\\
-E^3 & -H^2 & H^1 & 0 & -H^7 & H^6 & -H^5 & H^4\\
\hline
-E^4 & H^5 & H^6 & H^7 & 0 & -H^1 & -H^2 & -H^3\\
-E^5 & -H^4 & H^7 & -H^6 & H^1 & 0 & H^3 & -H^2\\
-E^6 & -H^7 & -H^4 & H^5 & H^2 & -H^3 & 0 & H^1\\
-E^7 & H^6 & -H^5 & -H^4 & H^3 & H^2 & -H^1 & 0
\end{array}\right\|$$

- для полученных алгебр

$$F^1_{ik}=\left\|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & E^1 & E^2 & E^3 & E^4 & E^5 & E^6 & E^7\\
-E^1 & 0 & H^5 & -H^7 & H^6 & -H^2 & -H^4 & H^3\\
-E^2 & -H^5 & 0 & H^6 & H^7 & H^1 & -H^3 & -H^4\\
-E^3 & H^7 & -H^6 & 0 & H^5 & -H^4 & H^2 & -H^1\\
\hline
-E^4 & -H^6 & -H^7 & -H^5 & 0 & H^3 & H^1 & H^2\\
-E^5 & H^2 & -H^1 & H^4 & -H^3 & 0 & -H^7 & H^6\\
-E^6 & H^4 & H^3 & -H^2 & -H^1 & H^7 & 0 & -H^5\\
-E^7 & -H^3 & H^4 & H^1 & -H^2 & -H^6 & H^5 & 0
\end{array}\right\|$$

$$F^2_{ik}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 2E^1 & 2E^2 & 2E^3 & 2E^4 & 2E^5 & 2E^6 & 2E^7 \\
-2E^1 & 0 & -H^{364.7} & H^{245.6} & -H^{537.2} & H^{476.3} & H^{723.5} & -H^{652.4} \\
-2E^2 & H^{346.7} & 0 & -H^{174.5} & -H^{615.3} & -H^{763.4} & H^{457.1} & H^{531.6} \\
-2E^3 & -H^{254.6} & H^{147.5} & 0 & -H^{726.1} & H^{612.7} & -H^{571.4} & H^{465.2} \\
\hline
-2E^4 & H^{573.2} & H^{651.3} & H^{762.1} & 0 & -H^{127.6} & -H^{235.7} & -H^{316.5} \\
-2E^5 & -H^{467.3} & H^{736.4} & -H^{621.7} & H^{172.6} & 0 & H^{314.2} & -H^{243.1} \\
-2E^6 & -H^{732.5} & -H^{475.1} & H^{517.4} & H^{253.7} & -H^{341.2} & 0 & H^{124.3} \\
-2E^7 & H^{625.4} & -H^{513.6} & -H^{456.2} & H^{361.5} & H^{234.1} & -H^{142.3} & 0
\end{array}\right\|$$

$$F^3_{ik}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 2E^1 & 2E^2 & 2E^3 & 2E^4 & 2E^5 & 2E^6 & 2E^7 \\
-2E^1 & 0 & H^{564.7} & -H^{745.6} & H^{637.2} & -H^{276.3} & -H^{423.5} & H^{352.4} \\
-2E^2 & -H^{546.7} & 0 & H^{674.5} & H^{715.3} & H^{163.4} & -H^{357.1} & -H^{431.6} \\
-2E^3 & H^{754.6} & -H^{647.5} & 0 & H^{526.1} & -H^{412.7} & H^{271.4} & -H^{165.2} \\
\hline
-2E^4 & -H^{673.2} & -H^{751.3} & -H^{562.1} & 0 & H^{327.6} & H^{135.7} & H^{216.5} \\
-2E^5 & H^{267.3} & -H^{136.4} & H^{421.7} & -H^{372.6} & 0 & -H^{714.2} & H^{643.1} \\
-2E^6 & H^{432.5} & H^{375.1} & -H^{217.4} & -H^{153.7} & H^{741.2} & 0 & -H^{524.3} \\
-2E^7 & -H^{325.4} & H^{413.6} & H^{156.2} & -H^{261.5} & -H^{634.1} & H^{542.3} & 0
\end{array}\right\|$$

Таким образом, в семипараметровых семимерных ортогональных и шестимерных унитарных преобразованиях вращения прогнозируются четыре поля и соответствующие им мультиплеты частиц: из 14-ти в двух группах по семь частиц при J=1 и из 12-ти в двух группах по шесть частиц при J=1/2. Эти преобразования применением операции умножения матриц позволяют получить описание полей и совокупностей частиц с произвольным спином. Вместе с тем, в семимерной алгебре имеют место операции векторного умножения трех, четырех, пяти и шести векторов с антисимметричными тензорами структурных констант, дающие соответствующие поля и мультиплеты частиц. Они обеспечивают соблюдение свойств симметрии семипараметровых преобразований векторных величин, свойственных алгебре семимерных векторов.

В заключение отметим, что число экспериментально выявленных барионов со спином J=1/2 и мезонов со спином J=1 близко к прогнозируемому семимерным исчислением (соответственно 30 из 36 и 42 из 49) [3], так что в ближайшем будущем мы станем свидетелями подтверждения либо опровержения применимости семимерной алгебры к описанию картины физического мира. В частности, в последнее время найдена предсказанная раннее частица с очарованием С=2.

Список литературы

1. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
2. **Коротков А. В.** Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. Новочеркасск: Набла, 1999. 100 с.
3. **Caso C. et al.** Review of Particle Physics (Particle Data Group) // European Physical Journal. 1998. № 1.

УДК 681.5

Технические науки

Статья посвящена исследованию параметрической чувствительности объектов и систем, синтеза неадаптивных и адаптивных алгоритмов, обеспечивающих необходимую робастность их динамических показателей. Решена задача управления непрерывными динамическими объектами в условиях неопределенности. Синтезирован закон управления системой на основе ее неопределенности и асимптотической устойчивости.

Ключевые слова и фразы: синтез; управление; моделирование; чувствительность; неопределенность.

Алена Леонидовна Кравцова
Кафедра управления в технических и биотехнических системах
Северо-Кавказский федеральный университет
borjenskaya@mail.ru

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ФУНКЦИЙ МОДАЛЬНОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТА, ЗАДАННОГО ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ©

Дано: весовая матрица объекта (ВМО), векторно-матричное линейное описание «Вход-состояние-выход» (ВСВ) непрерывного объекта управления (НОУ) с интервальными матричными компонентами в форме [1-20; 40-42]: