Матвеева Анастасия Михайловна

К КОНФОРМНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ТКАНЕЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе приведены дифференциальные уравнения ткани ? на распределении М гиперплоскостных элементов в конформном пространстве . Доказано, что она существует с произволом (n-1) 2 функций n аргументов. К изучению привлекаются методы дифференциально-геометрических исследований (метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева и метод внешних дифференциальных форм Э. Картана).

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2012. № 11 (66). C. 144-146. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2012/11/

УДК 514.756.2
Физико-математические науки

В работе приведены дифференциальные уравнения ткани Σ на распределении M гиперплоскостных элементов в конформном пространстве C_n. Доказано, что она существует с произволом (n-1)^2 функций n аргументов. К изучению привлекаются методы дифференциально-геометрических исследований (метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева и метод внешних дифференциальных форм Э. Картана).

Ключевые слова и фразы: конформное пространство; проективное пространство; полуизотропный репер; распределение; ткань.

Анастасия Михайловна Матвеева, к.ф.-м.н.
Кафедра геометрии
Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева
ammath@mail.ru

К КОНФОРМНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ТКАНЕЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ©

Во всей работе индексы принимают следующие значения:
$\lambda, \mu = \overline{0, n+1}$; $K, L = \overline{1, n}$; $i, j, k, s = \overline{1, n-1}$.

Рассмотрим конформное пространство C_n, $n \geq 2$ [8], структурные уравнения которого имеют вид [6] $D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu$. Отнесем его к подвижному полуизотропному [1] реперу $R = \{A_\lambda\}$, состоящему из точек A_0, A_{n+1} и n гиперсфер A_K, проходящих через эти точки. Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [8]

$$\left\| g_{\lambda\mu} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{KL} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \neq 0, \; g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}.$$

Рассмотрим распределения [6] M и H (n-1)-мерных и одномерных линейных элементов (A_0, L_{n-1}) и (A_0, L_1) ($n \geq 3$). Здесь L_{n-1} есть (n-1)-параметрическая связка гиперсфер $P = \xi^0 A_0 + \xi^i P_i$, натянутых на точку A_0, и гиперсферы $P_i = A_i + x_i^0 A_0$; аналогично, L_1 есть пучок гиперсфер $Q = \eta^0 A_0 + \eta^n P_n$, где $P_n = A_n + x_n^0 A_0$. Предположим, что в каждом центре A_0 текущие элементы L_{n-1} и L_1 распределений M и H ортогональны, то есть $(P_i P_n) \equiv (A_i A_n) = g_{in} = 0$.

В выбранном репере распределения M и H определяются соответственно следующими системами дифференциальных уравнений [Там же]:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K, \; \omega_n^i = \Lambda_{nK}^i \omega_0^K, \tag{1}$$

причем имеют место зависимости

$$dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0, \; dg_{nn} - 2g_{nn}\omega_n^n = 0,$$
$$g_{ij}\Lambda_{nK}^j + g_{nn}\Lambda_{iK}^n = 0. \tag{2}$$

В выражениях гиперсфер P_i и P_n функции x_i^0, x_n^0 подчинены дифференциальным уравнениям

$$dx_i^0 + x_i^0\omega_0^0 - x_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = x_{iK}^0\omega_0^K, \tag{3}$$
$$dx_n^0 + x_n^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = x_{nK}^0\omega_0^K,$$

следовательно, задание полей квазитензоров x_i^0, x_n^0, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (3), равносильно полному оснащению [6; 8] обоих ортогональных распределений M и H.

При перенесении Дарбу конформного пространства C_n в проективное пространство P_{n+1} линейный элемент L_{n-1} распределения M и одномерный линейный элемент L_1 распределения H отображаются соответственно в (n-1)-мерную плоскость $\Pi_{n-1}(A_0) = [A_0 A_i]$ и прямую $[A_0 A_n]$, лежащие в касательной гиперплоскости $T_n(A_0)$ к гиперквадрике Дарбу Q_n^2 в точке A_0, пересекающиеся в точке A_0 и сопряженные относительно абсолюта Q_n^2. Распределение плоскостей $\Pi_{n-1} \subset P_{n+1}$ обозначим через π.

Пусть на распределении π в P_{n+1} задано n-1 линейно независимых гладких полей допустимых [3] направлений $A_0 B_i$, где $B_i = a_i^j A_j$, $\left| a_i^j \right| \neq 0$. Линии, огибающие поля этих направлений, принадлежат распределению (n-1)-мерных линейных элементов π и образуют на нем (n-1)-ткань $\tilde{\Sigma}$, причем прямые (A_0B_i) являются касательными к ее линиям в точке A_0. В этом случае по аналогии с работой [5] будем говорить, что на распределении π в P_{n+1} задана (n-1)-ткань $\tilde{\Sigma}$.

Требование инвариантности направления A_0B_i равносильно уравнениям:

$$\delta a_i^s + a_i^k \pi_k^s = \overline{\theta_i^i} a_i^s, \ \overline{\theta_i^i} = \theta_i^i \Big|_{\omega_0^K = 0}.$$

Так как $\overline{\theta_i^i}$ есть полный дифференциал некоторой функции ($D\overline{\theta_i^i} = 0$), то $D\theta_i^i = \theta_{iK}^i \wedge \omega_0^K$ (по i нет суммирования).

При каждом фиксированном i система форм $\{\Delta a_i^s, \omega_0^K\}$,

$$\Delta a_i^s \stackrel{def}{=} da_i^s + a_i^k \omega_k^s - a_i^s \theta_i^i, \tag{4}$$

вполне интегрируема, так как

$$D\Delta a_i^s = \Delta a_i^k \wedge (\omega_k^s - \delta_k^s \theta_i^i) + a_i^k (\delta_L^s \omega_k^0 - \Lambda_{kL}^n \omega_n^s + g_{kL} \omega_{n+1}^s - \delta_k^s \theta_{iL}^i) \wedge \omega_0^L.$$

Следовательно, n-1 система дифференциальных уравнений

$$\Delta a_i^s = a_{iK}^s \omega_0^K \tag{5}$$

на распределении π в P_{n+1} определяет n-1 поле инвариантных направлений A_0B_i, поэтому уравнения системы (5) и уравнения распределения π в P_{n+1} (1) представляют собой дифференциальные уравнения ткани $\tilde{\Sigma}$ на распределении π.

Из (4), (5), согласно лемме Н. М. Остиану [4], следует, что возможна частичная канонизация репера, при которой $a_i^s = \delta_i^s$; геометрически это означает, что $A_i \equiv B_i$. При такой канонизации репера из (5) имеем

$$\omega_i^j = a_{iK}^j \omega_0^K, i \neq j.$$

Таким образом, проективный репер в P_{n+1} отнесен к ткани $\tilde{\Sigma}$ на распределении π; в таком репере дифференциальные уравнения ткани $\tilde{\Sigma}$ имеют вид:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K, \ \omega_n^i = \Lambda_{nK}^i \omega_0^K, \ \omega_i^j = a_{iK}^j \omega_0^K, i \neq j. \tag{6}$$

Уравнения линии l, принадлежащей распределению π, согласно [2], имеют вид

$$l: \begin{cases} \omega_0^{n+1} = \omega_0^n = 0, \\ \omega_0^i = l^i \theta, D\theta = \theta \wedge \theta_0^0. \end{cases} \tag{7}$$

Так как система уравнений $\omega_0^{n+1} = \omega_0^n = 0$ вдоль любой кривой l (7) вполне интегрируема, то все линии l, принадлежащие распределению π, лежат на абсолюте Q_n^2; следовательно, линии ткани $\tilde{\Sigma}$ также лежат на Q_n^2.

Каждому из n-1 семейств линий ткани $\tilde{\Sigma}$ на распределении π на распределении M в C_n соответствует семейство линий; n-1 таких линейно независимых семейств на распределении M образуют ткань Σ на распределении M в C_n.

В конформном репере R, отнесенном к ткани Σ на распределении M в C_n, эта ткань определяется системой дифференциальных уравнений (6), причем имеют место соотношения (2). Это значит, что в полуизотропном полуортогональном репере $R = \{A_0, A_i, A_n, A_{n+1}\}$ каждая гиперсфера A_i принадлежит пучку касающихся между собой в его центре $A_0 \in M$ гиперсфер, определяемому точкой A_0 и гиперсферой dA_0 (mod l $\{\omega_0^k = 0, k \neq i\}$). Следовательно, в выбранном репере R роль «касательной» к i-й линии ткани Σ на распределении M в ее точке A_0 играет пучок гиперсфер $X_i = A_i + \lambda_i A_0$.

Замыкая уравнения системы (6), находим:

$$\begin{gathered} (d\Lambda_{iK}^n + \Lambda_{iK}^n \omega_0^0 - \Lambda_{sK}^n \omega_i^s - \Lambda_{iL}^n \omega_K^L + \Lambda_{iK}^n \omega_n^n - \delta_K^n \omega_i^0 - \delta_K^s g_{is} \omega_{n+1}^n) \wedge \omega_0^K = 0, \\ (d\Lambda_{nK}^i + \Lambda_{nK}^i \omega_0^0 - \Lambda_{nK}^i \omega_n^n - \Lambda_{nL}^i \omega_K^L + \Lambda_{nK}^s \omega_s^i - \delta_K^i \omega_n^0 - \delta_K^n g_{nn} \omega_{n+1}^i) \wedge \omega_0^K = 0, \\ (da_{iK}^j + a_{iK}^j \omega_0^0 - a_{iK}^j \omega_i^i - a_{iL}^j \omega_K^L + a_{iK}^j \omega_j^j + \sum_{t \neq i,j} a_{iK}^t \omega_t^j - \\ -\delta_K^j \omega_i^0 - g_{iK} \omega_{n+1}^j + \Lambda_{iK}^n \omega_n^j) \wedge \omega_0^K = 0, \quad i \neq j, \end{gathered} \tag{8}$$

или

$$\Delta\Lambda_{iK}^n \wedge \omega_0^K = 0, \quad \Delta\Lambda_{nK}^i \wedge \omega_0^K = 0, \quad \Delta a_{iK}^j \wedge \omega_0^K = 0, i \neq j, \tag{9}$$

причем для (2) в силу (8), (9) имеем

$$g_{ij} \Delta\Lambda_{nK}^j + g_{nn} \Delta\Lambda_{iK}^n = 0. \tag{10}$$

Раскроем квадратичные уравнения (9) по лемме Картана:

$$\begin{gathered} \Delta\Lambda_{iK}^n = \tilde{\Lambda}_{iKL}^n \omega_0^L, \quad \tilde{\Lambda}_{i[KL]}^n = 0, \\ \Delta\Lambda_{nK}^i = \tilde{\Lambda}_{nKL}^i \omega_0^L, \quad \tilde{\Lambda}_{n[KL]}^i = 0, \\ \Delta a_{iK}^j = \tilde{a}_{iKL}^j \omega_0^L, \quad \tilde{a}_{i[KL]}^j = 0, \ i \neq j. \end{gathered} \tag{11}$$

Из соотношений (10), (11) следует

$$\tilde{\Lambda}^{j}_{nKL} = -g^{ij} g_{nm} \tilde{\Lambda}^{n}_{iKL}. \qquad (12)$$

Таким образом, в силу (11), (12) число произвольных параметров, определяющих наиболее общий интегральный элемент s_n [7] системы (6), равен $N = \frac{n(n-1)^2(n+1)}{2}$. Характеры [Там же] системы (6) есть

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = (n-1)^2,$$

в силу чего число Картана [Там же]

$$Q = s_1 + 2s_2 + \ldots + ns_n = \frac{n(n-1)^2(n+1)}{2}.$$

Так как $Q = N$, то система дифференциальных уравнений (6) - в инволюции [Там же], широта ее решения определяется $(n-1)^2$ функциями *n* аргументов. Следовательно, доказана

Теорема. *На распределении гиперплоскостных элементов* M *в конформном пространстве* C_n *ткань* $\Sigma \subset M$ *в* C_n *существует с произволом* $(n-1)^2$ *функций n аргументов.*

Список литературы

1. **Бушманова Г. В., Норден А. П.** Элементы конформной геометрии. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. 178 с.
2. **Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.** Распределения *m*-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности - I // Труды Геометрического семинара / ВИНИТИ АН СССР. М., 1971. Т. 3. С. 49-94.
3. **Норден А. П.** Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.
4. **Остиану Н. М.** О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. Т. 7. № 2. С. 231-240.
5. **Столяров А. В.** Двойственная теория оснащенных многообразий. 2-е изд., доп. Чебоксары: Изд-во Чуваш. гос. пед. ин-та, 1994. 290 с.
6. **Столяров А. В.** Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований и его приложения. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2002. 204 с.
7. **Фиников С. П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. - Л.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.
8. **Akivis M. A., Goldberg V. V.** Conformal Differential Geometry and Its Generalizations. USA, 1996. 384 p.

УДК (811.111+811.161.3)’44
Филологические науки

В статье рассматриваются лексико-семантические способы объективации аппроксимированной дискретной квантификации в белорусском и английском языках. Особое внимание обращено на разные значения в рамках категории квантитативности, а также на количественные значения с разными коннотациями в белорусском языке в сопоставлении с английским языком. Проведенное исследование позволило определить семантические характеристики категории квантитативности в белорусском и английском языках, выявить ее универсальные и национально-специфические черты. Для анализа языковых единиц использованы семантический, функциональный и компаративный методы. Исследование выполнено на фактическом материале белорусских и английских пословиц и поговорок, извлеченных из сборников и словарей.

Ключевые слова и фразы: аппроксимация; квантитативность; количественное значение; приблизительное количество; дискретная квантитативность; неопределенное количество; определенное количество; числительное.

Елена Павловна Маюк
Кафедра белорусского языка и литературы
Минский государственный лингвистический университет, Республика Беларусь
leaka@tut.by

ЛЕКСИКО-СЕМАНТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ РЕАЛИЗАЦИИ АППРОКСИМИРОВАННОЙ ДИСКРЕТНОЙ КВАНТИТАТИВНОСТИ В БЕЛОРУССКОМ И АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКАХ[©]

Аппроксимированная квантификация является важной составляющей категории квантитативности. Количественные отношения между предметами, между предметом и действием, между предметом и признаком, между действием и признаком, между признаками, между действиями имеют универсальный характер и широко представлены во всех сферах человеческой деятельности. Количественная сторона действительности формирует мыслительную категорию количества, в которой выделяется два вида понятий: понятия, отражающие реальные, объективно существующие свойства количества, и понятия, отображающие специфику осмысления количественных отношений человеческим сознанием. В свойстве «квантитативность», воспринимаемом «и как конкретное указание на количественную характеристику, и как осознание того, что объект обладает некой количественной оценкой в мышлении относительно понятийных категорий абстрактного