Ипатов Дмитрий Евгеньевич

РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА С МНОГОЗНАЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В статье рассматривается многослойная квазигеострофическая модель общей циркуляции океана, основными переменными которой являются значения функции тока на каждом из слоев. Предполагается, что правые части уравнений модели задаются многозначными отображениями. Доказывается существование решений полученного дифференциального включения. Показано, что множество решений непрерывно по метрике Хаусдорфа и зависит от начального условия.

УДК 517.95
Физико-математические науки

В статье рассматривается многослойная квазигеострофическая модель общей циркуляции океана, основными переменными которой являются значения функции тока на каждом из слоев. Предполагается, что правые части уравнений модели задаются многозначными отображениями. Доказывается существование решений полученного дифференциального включения. Показано, что множество решений непрерывно по метрике Хаусдорфа и зависит от начального условия.

Ключевые слова и фразы: дифференциальное включение; многозначное отображение; модель общей циркуляции океана; существование решений; непрерывная зависимость решений от начального условия.

Дмитрий Евгеньевич Ипатов
Кафедра физико-математических проблем волновых процессов
Московский физико-технический институт
ipde777@gmail.com

РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА С МНОГОЗНАЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ©

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

Дифференциальные включения являются естественным обобщением понятия дифференциального уравнения на случай неточно заданной динамики системы и неполной информации о ней. Аппарат дифференциальных включений активно используется при решении задач оптимального управления и дифференциальных игр в физике, экономике, демографии и других областях [4-6; 13-17; 24]. Задачи ассимиляции данных наблюдений играют фундаментальную роль в понимании процессов геофизической гидродинамики. До сих пор такие задачи рассматривались только для детерминированных систем [1-3; 7-12; 18-21; 23]. Однако математические модели могут лишь приближенно описывать природные явления, их формулировки заведомо содержат элементы неопределенности. В связи с этим представляет интерес изучение задач усвоения данных на основе теории многозначных отображений. Первоначальным этапом является исследование разрешимости самих дифференциальных включений, которое проводится в настоящей работе.

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, $0<T<+\infty$, $Q=\Omega\times(0,T)$. Будем считать, что цилиндр воды, проекцией которого на горизонтальную плоскость является Ω, разбит по глубине на N слоев средней высоты H_k и постоянной плотности p_k. Внутри каждого слоя вводится квазигеострофическая функция тока ψ_k. Рассмотрим следующую многослойную квазигеострофическую модель общей циркулции океана [2; 18; 20; 22]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Delta\psi_1}{\partial t}+J(\psi_1,\Delta\psi_1)+\beta\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}+\dfrac{f_0}{H_1}w_1-\mu\Delta^2\psi_1=f_1, \\ \dfrac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}+J(\psi_k,\Delta\psi_k)+\beta\dfrac{\partial\psi_k}{\partial x}+\dfrac{f_0}{H_k}(w_k-w_{k-1})-\mu\Delta^2\psi_k=0, \quad k=\overline{2,N-1}, \\ \dfrac{\partial\Delta\psi_N}{\partial t}+J(\psi_N,\Delta\psi_N)+\beta\dfrac{\partial\psi_N}{\partial x}+\dfrac{f_0}{H_N}(J(\psi_N,h_b)-w_{N-1})+\nu\Delta\psi_N-\mu\Delta^2\psi_N=0, \end{cases} \tag{1}$$

где:

$w_k=\dfrac{f_0}{g_k}(\dfrac{\partial}{\partial t}(\psi_{k+1}-\psi_k)+J(\psi_k,\psi_{k+1}))$ - вертикальная скорость на границе между слоями с номерами k и $k+1$; $g_k=g\dfrac{(p_{k+1}-p_k)}{p_{k+1}}>0$ - уменьшенный коэффициент гравитации; g - ускорение свободного падения; f_0, β, μ, ν - положительные константы; f_0 - среднее значение параметра Кориолиса; β - градиент параметра Кориолиса; μ - коэффициент вязкости; ν - коэффициент трения о дно; $h_b=h_b(x,y)$ - функция рельефа дна; $f_1=f_1(x,y,t)$ - завихренность силы напряжения, создаваемая ветром; $\Delta=\dfrac{\partial}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа; $J(a,b)=a_x b_y-a_y b_x$ - якобиан.

К системе (1) присоединяются условия на границе области Ω

$$\psi_k|_{\partial\Omega}=C_k(t), \quad \Delta\psi_k|_{\partial\Omega}=0, \quad k=1,\dots,N \tag{2}$$

и закон сохранения массы воды

$$\int_\Omega w_k\,d\Omega=0, \quad k=1,\dots,N-1, \tag{3}$$

после чего решения (1)-(3) могут быть определены с точностью до константы, зависящей от времени. Выберем еще одно дополнительное условие

$$\int_\Omega \psi_1\,d\Omega=0.$$

Тогда с учетом (2)-(3) находим:

$$\int_\Omega \psi_k\,d\Omega=0, \quad k=1,\dots,N. \tag{4}$$

Систему (1), (2), (4) дополним теперь начальными условиями

$$\psi_k|_{t=0}=\psi_k^0(x,y), \qquad k=1,\dots,N. \tag{5}$$

Будем обозначать через $\|\cdot\|$ норму в пространстве $L_2(\Omega)$, рассматриваемом в качестве основного; $|\Omega|$ - площадь Ω; $W_2^n(\Omega),\ n=1,2$ - пространства Соболева функций, квадратично интегрируемых в Ω со своими производными до порядка n; $\|\cdot\|_n$ - норма в этих пространствах; $W_2^{-n}(\Omega)$ - сопряженные с $W_2^n(\Omega)$ пространства с нормой $\|\cdot\|_{-n}$; $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ - пополнение по норме $W_2^1(\Omega)$ множества всех бесконечно дифференцируемых финитных функций, определенных в Ω; $W_{2,0}^2(\Omega)=W_2^2(\Omega)\bigcap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Введем гильбертовы пространства функций, определенных в Q:

$$Y_0=L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),\ Y_1=L_2(0,T;W_{2,0}^2(\Omega)),\ Y_0'=L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega)),$$

$$Y_1'=L_2(0,T;W_2^{-2}(\Omega)),\ X_0=\left\{\varphi(x,y,t):\varphi|_{\partial\Omega}=0,\Delta\varphi\in Y_0,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\in Y_0\right\},$$

$$X_1=\left\{\varphi(x,y,t):\varphi\in Y_1,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\in L_2(Q)\right\}.$$

Далее определим следующие пространства вектор-функций высоты N:

$$H=W_{2,0}^2(\Omega)\times(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^{N-1},\ X=X_0\times(X_1)^{N-1},\ Y'=Y_0'\times(Y_1')^{N-1},$$

$$E=W_2^{-1}(\Omega)\times\left(W_2^{-2}(\Omega)\right)^{N-1}.$$

Обозначим через $\varphi_k=\psi_k-C_k$, т.е. $\nabla\varphi_k=\nabla\psi_k$, $\varphi_k|_{\partial\Omega}=0$, и запишем задачу (1)-(2), (4)-(5) в виде

$$\Phi(\varphi)\equiv\left(F(\varphi);T_0\varphi\right)=\left(f;\varphi^0\right), \tag{6}$$

где

$$\kappa=(\varphi_1,\dots,\varphi_N),\ f=(f_1,\dots,f_N),\ \varphi^0=(\varphi_1^0,\dots,\varphi_N^0),$$

$$F(\varphi)=(F_1(\varphi),\dots,F_N(\varphi)),\ T_0\varphi=\varphi|_{t=0},$$

$$F_k(\varphi)=\frac{\partial\Delta\varphi_k}{\partial t}+J(\varphi_k,\Delta\varphi_k)+\beta\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+\frac{f_0}{H_k}(w_k-w_{k-1})-\mu\Delta^2\varphi_k+\delta_{k,N}\left[\frac{f_0}{H_N}J(\varphi_N,h_b)+\nu\Delta\varphi_N\right],$$

$\delta_{k,N}$ - символ Кронекера,

$$w_k=\frac{f_0}{g_k}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_{k+1}+C_{k+1}-\varphi_k-C_k)+J(\varphi_k,\varphi_{k+1})\right), \quad k=\overline{1,N-1},$$

$$w_0=w_N=0, \quad C_k=-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\varphi_k\,d\Omega.$$

Действие оператора Φ будем рассматривать из X в $Y'\times H$. Всюду далее считается, что $h_b(x,y)\in W_2^2(\Omega)$. В [2; 20] показано, что верны

Лемма 1. *Оператор Φ задает ограниченное, непрерывное, слабо непрерывное отображение из X в $Y'\times H$.*

Теорема 1. *Существует определенный на всем $Y' \times H$ обратный оператор Φ^{-1}, который является ограниченным, непрерывным и слабо непрерывным оператором, действующим из $Y' \times H$ в X, причем*

$$\left\| \Phi^{-1}\left(f + \delta f; \varphi^0 + \delta\varphi^0\right) - \Phi^{-1}\left(f; \varphi^0\right) \right\|_X \le$$
$$\le c_1\left(\| f \|_{Y'}, \| \varphi^0 \|_H\right)\left(\| \delta f \|_{Y'} + \| \delta f \|_{Y'}^2 + \| \delta\varphi^0 \|_H + \| \delta\varphi^0 \|_H^2\right), \tag{7}$$

где $c_1(\cdot,\cdot)$ - непрерывная положительная неубывающая функция.

Пусть задана функция $f_1^0 \in W_2^{-1}(\Omega)$ и положительные постоянные r_k, $k = \overline{1,N}$. Определим на $[0,T]$ многозначные отображения

$\mathcal{F}_1(t) = \left\{ \zeta \in W_2^{-1}(\Omega) : \| \zeta - f_1^0 \|_{-1} \le r_1 \right\}$, $\mathcal{F}_k(t) = \left\{ \zeta \in W_2^{-2}(\Omega) : \| \zeta \|_{-2} \le r_k \right\}$, $k = \overline{2,N}$,

$\mathcal{F} = \left(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_N\right)$.

Определение 1 [16]. *Пусть многозначное отображение $\mathcal{F}$ каждому значению $t \in [0,T]$ сопоставляет непустое множество пространства E. Суммируемой ветвью $\mathcal{F}$ называется однозначная функция f, принадлежащая пространству Лебега-Бохнера $L_1(0,T;E)$, для которой $f(t) \in \mathcal{F}(t)$ при почти всех $t \in [0,T]$.*

Введем расстояние между множествами $A, B \subset X$, обозначив:

$\mathrm{dist}_X(A,B) = \sup\limits_{\zeta \in A} \inf\limits_{\rho \in B} \| \zeta - \rho \|_X$ - уклонение множества A от множества B;

$h_X(A,B) = \max\left\{ \mathrm{dist}_X(A,B), \mathrm{dist}_X(B,A) \right\}$ - расстояние между A и B по метрике Хаусдорфа. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\Phi(\phi) \equiv \left(F(\phi); T_0\phi\right) \in \left(�; \phi^0\right) \tag{8}$$

Определение 2. *Решением (8) будем называть вектор-функцию $\varphi \in X$, такую что $\Phi(\varphi) = \left(f; \varphi^0\right)$ для какой-либо суммируемой ветви f отображения $\mathcal{F}$.*

Теорема 2. *При любом $\varphi^0 \in H$ дифференциальное включение (8) имеет решение, причем множество его решений непрерывно зависит от φ^0 по метрике Хаусдорфа.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{F}$ имеет суммируемые ветви. Например, можно положить $f_k(t) = \rho_k$, $t \in [0,T]$, $k = \overline{1,N}$, где ρ_k - любые функции, удовлетворяющие условиям $\| \rho_1 - f_1^0 \|_{-1} \le r_1$, $\| \rho_k \|_{-2} \le r_k$, $k = \overline{2,N}$. Пусть f - какая-либо суммируемая ветвь $\mathcal{F}$. Тогда $f \in L_\infty(0,T;E)$, следовательно, $f \in Y'$ и $\| f \|_{Y'} \le c_0 = \sqrt{T}\left((r_1 + \| f_1^0 \|_{-1})^2 + \sum_{k=2}^N r_k^2\right)^{1/2}$. По Теореме 1 уравнение $\Phi(\varphi) = \left(f; \varphi^0\right)$ имеет решение $\varphi \in X$, которое и будет решением включения (8).

Обозначим через U множество решений (8) и через U_* - множество решений включения $\Phi(\varphi) \in \left(\mathcal{F}; \varphi_*^0\right)$ для какого-либо $\varphi_*^0 \in H$. Возьмем произвольное $\varphi \in U$, тогда для φ верно равенство $\Phi(\varphi) = \left(f; \varphi^0\right)$, где f является суммируемой ветвью отображения $\mathcal{F}$. По Теореме 1 уравнение $\Phi(\varphi_*) = \left(f; \varphi_*^0\right)$ имеет решение $\varphi_* \in X$. Из Определения 2 вытекает, что $\varphi_* \in U_*$. Учитывая (7), заключаем, что верно неравенство

$$\mathrm{dist}_X(\varphi, U_*) \le \| \varphi - \varphi_* \|_X \le c_1\left(c_0, \| \varphi^0 \|_H\right)\left(\| \varphi^0 - \varphi_*^0 \|_H + \| \varphi^0 - \varphi_*^0 \|_H^2\right).$$

Так как вектор-функцию $\varphi \in U$ взяли произвольно, то

$$\mathrm{dist}_X(U, U_*) \le c_1\left(c_0, \| \varphi^0 \|_H\right)\left(\| \varphi^0 - \varphi_*^0 \|_H + \| \varphi^0 - \varphi_*^0 \|_H^2\right).$$

Используя аналогичные рассуждения, убеждаемся, что

$$\mathrm{dist}_X(U_*, U) \le c_1\left(c_0, \| \varphi^0 \|_H\right)\left(\| \varphi^0 - \varphi_*^0 \|_H + \| \varphi^0 - \varphi_*^0 \|_H^2\right).$$

Таким образом, $h_X(U, U_*) \to 0$ при $\| \varphi^0 - \varphi_*^0 \|_H \to 0$.

Список литературы

1. **Агошков В. И., Ипатова В. М.** Разрешимость задачи усвоения данных наблюдений в трехмерной модели динамики океана // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1064-1075.
2. **Агошков В. И., Ипатова В. М.** Разрешимость одной задачи вариационного усвоения данных наблюдений // Доклады академии наук. 1998. Т. 360. № 4. С. 439-441.
3. **Агошков В. И., Ипатова В. М., Залесный В. Б., Пармузин Е. И., Шутяев В. П.** Задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений для моделей общей циркуляции океана и методы их решения // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 6. С. 734-770.

4. **Захаров В. К., Половинкин Е. С., Яшин А. Д.** Математическая модель государства // Доклады академии наук. 2007. Т. 413. № 2. С. 158-162.
5. **Иванов Г. Е., Половинкин Е. С.** Второй порядок сходимости алгоритма вычисления цены линейных дифференциальных игр // Доклады академии наук. 1995. Т. 340. № 2. С. 151-154.
6. **Иванов Г. Е., Половинкин Е. С.** О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1641-1648.
7. **Ипатов Д. Е.** Численная реализация трехмерной модели гидротермодинамики океана с условием свободной поверхности на верхней границе области // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. Казань, 2011. Т. 43. С. 163-165.
8. **Ипатова В. М.** Задача инициализации для модели общей циркуляции атмосферы // Труды МФТИ. 2012. Т. 4. № 2. С. 121-130.
9. **Ипатова В. М.** Сходимость численных решений задачи вариационного усвоения данных альтиметрии в квазигеострофической модели циркуляции океана // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 3. С. 411-418.
10. **Ипатова В. М., Ипатов Д. Е.** Решение задач об определении коэффициентов для трехмерной модели гидротермодинамики океана // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2011. № 9. С. 25-29.
11. **Ипатова В. М., Ипатов Д. Е.** Решение задачи ассимиляции данных для модели поперечного обтекания бесконечного цилиндра // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2012. № 4. С. 111-113.
12. **Марчук Г. И., Агошков В. И., Ипатова В. М.** Теория разрешимости начально-краевых задач и задач ассимиляции данных для основных уравнений океана // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 1. С. 93-101.
13. **Половинкин Е. С.** Интегрирование по Риману многозначных отображений // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 1. С. 117-126.
14. **Половинкин Е. С.** Сильно выпуклый анализ // Математический сборник. 1996. Т. 187. № 2. С. 103-130.
15. **Половинкин Е. С.** Теорема существования решений дифференциального включения с псевдо-липшицевой правой частью // Нелинейный мир. 2012. Т. 10. № 9. С. 571-578.
16. **Половинкин Е. С.** Элементы теории многозначных отображений. М.: МФТИ, 1982. 127 с.
17. **Половинкин Е. С., Иванов Г. Е., Балашов М. В., Константинов Р. В., Хорев А. В.** Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 10. С. 95-122.
18. **Agoshkov V. I., Ipatova V. M.** Convergence of Solutions to the Problem of Data Assimilation for a Multilayer Quasigeostrophic Model of Ocean Dynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2010. Vol. 25. № 2. P. 105-115.
19. **Agoshkov V. I., Ipatova V. M.** Existence Theorems for a Three-Dimensional Ocean Dynamics Model and a Data Assimilation Problem // Doklady Mathematics. 2007. Vol. 75. № 1. P. 28-30.
20. **Agoshkov V. I., Ipatova V. M.** Solvability of the Altimeter Data Assimilation Problem in the Quasi-Geostrophic Multilayer Model of Ocean Circulation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1997. Vol. 37. № 3. P. 355-366.
21. **Ipatova V. M.** Solvability of the Ocean Hydrothermodynamics Problem under a Nonlinear State Equation // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2008. Vol. 23. № 2. P. 185-196.
22. **Ipatova V. M.** Uniform Attractors of Finite-Difference Schemes for the Multilayer Quasigeostrophic Model of Ocean Dynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. Vol. 26. № 2. P. 143-159.
23. **Ipatova V. M., Agoshkov V. I., Kobelkov G. M., Zalesny V. B.** Theory of Solvability of Boundary Value Problems and Data Assimilation Problems for Ocean Dynamics Equations // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2010. Vol. 25. № 6. P. 511-534.
24. **Polovinkin E. S., Smirnov G. V.** On One Approach to the Differentiation of Multivalued Mappings and Necessary Conditions for Optimality of Solutions to Differential Inclusions // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 6. С. 944-954.

УДК 681.5:621.77
Технические науки

В статье рассматриваются вопросы моделирования и управления процессом индукционной плавки металла. Представлена компьютерная модель индукционной печи. Исследовано влияние возбуждения частоты индуктора на температуру в слое металла. Рассмотрена целесообразность и возможность использования для управления процессом теории нейросетей.

Ключевые слова и фразы: индукционная плавка металла; автоматизация; моделирование; нейросеть; анализ.

Николай Александрович Карпов
Донецкий национальный технический университет, Украина
Wega44@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ ИНДУКЦИОННОЙ ПЛАВКИ МЕТАЛЛА©

Актуальность проблемы. Индукционные печи обладают рядом бесспорных преимуществ по сравнению с конкурентоспособными технологиями плавки металлов и составляют значительную часть от общего объема аналогичного оборудования. Затраты на электроэнергию составляют основную статью себестоимости продукции в электротехнологических комплексах плавки металла индукционным методом. Таким образом, большое значение приобретает проблема достижения предельных качественных показателей процессов